Phil. 2723.

Math Un. 193
-2
Mathesis. Systemata & methodi
141.
R

Joseph Tanzers

der Weltweisheit und beyder Rechten Doktors, churfürstl. geistl. Raths, des sämmtlichen lateinisch und deutschen Schulwesens in Baiern und der oberen Pfalz Vicedirektors, zu u. l. Fr. in München Kanonikus, ordentl. Lehrers der Physik und Mathematik

mathematisches Lehrbuch

zum

Gebrauche

der

churfürstlichen Lyceen.

II. Theil

sammt den Logarithmen der Sinus, Tangenten, und der natürlichen Zahlen, nebst 8 Kupfertafeln.

Mit Genehmigung des churfürstl. Büchercensurkollegiums.

München 1781.

Gedruckt bey Johann Paul Vötter, churpfalzbaierischen Hof- Akademie- und Landschaftsbuchdrucker am Färbergraben.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem
Durchleuchtigsten Fürsten
und
Herrn Herrn
Karl Theodor
Pfalzgrafen
bey
Rhein,
Herzoge
in
Ober- und Niederbaiern
des
H. R. Reichs
Erztruchseß
und
Churfürsten,
zu
Jülich, Cleve und Bergen
Herzog rc. rc.
meinem gnädigsten Herrn
Herrn.

Vorrede.

Ich liefere hier den zweyten Theil meines mathematischen Lehrbuches, nach eben dem Plane, nach welchem ich den ersten abgefaßt habe. So viel mir thunlich schien, suchte ich mehr Schärfe in die geometrischen Beweise zu bringen, als man in den meisten unsrer Lehrbücher findet, und den Geist der neuern Mathematiker nach und nach in meinem Vaterlande zu verbreiten. Es ist mir immer unbegreiflich, wie sich einige Lehrer heut zu Tage noch so sehr an einen Wolf und de la Caille halten können, daß sie sogar Commentarien darüber schreiben.

Von der Differential- und Integralrechnung wird der Absicht zur Folge, in welcher ich sie schon in der Arithmetik vorangeschickt habe, beinahe die ganze Geometrie durch Gebrauch gemacht. Seite 47, 48, 84, sind Beyspiele davon. S. 54 wird das Verhältniß des Durchmessers zur Zirkelperipherie daraus hergeleitet. S. 85, 87, 93 werden die Körper und ihre Oberflächen dadurch berechnet. Es sind zwar auch die geometrischen Arten der Beweise und Berechnungen nicht weggelassen, damit sich ein Lehrer diese, oder jene nach Belieben und Gutbefinden wählen könne: Doch hat mich die Erfahrung gelehrt, daß die jungen Leute, wenn sie einmal an die Differentialrechnung gewöhnt sind, die Beweise, welche aus dieser geholt werden, allen übrigen vorziehen. Nicht nur in der Dichtkunst, sondern auch in der Mathematik werden gute Köpfe vom Erhabenen gereizet.

Der Unbequemlichkeit wegen, welche man bey trigonometrischen Rechnungen aus dem Mangel der Logarithmen zu haben pflegt, ließ ich sie so abdrucken, daß sie bey dem Lehrbuche da, oder weg seyn können. Die Logarithmen der natürlichen Zahlen gehen nur bis 1000, weil sie bey gemeinen Rechnungen erklecklich sind. Für jene, welche mehr Genauigkeit erfodern, pflege ich Schulzens Tafeln zu empfehlen.

In

In der Lehre von den Kegelschnitten, wo ich meisten Schenmarks anlytischer Geometrie folgte, war meine Hauptabsicht, die Eigenschaften dieser krumen Linien allgemein darzuthun: und obschon ein oder anderer Beweis davon etwas schwer zu seyn scheinet, so schwindet doch die Schwierigkeit theils durch die stuffenweise Ordnung derselben, theils durch die jederzeit angezeigte Verfahrungsart meistens so zusammen, daß selbst ein Anfänger, wenn er sich einmal den analytischen Gang recht bekannt gemacht hat, und in der Algebra die nöthige Stärke besizt, die geometrischen Beweise beynahe schwerer, oder doch gewiß mühsamer findet, als diese. Es ist in den zweenen Theilen meiner Mathematik fast kein Beweis, keine Aufgabe, welche nicht am Ende des verflossenen Schuljahres, in einer zweytägigen öffentlichen Prüfung von Fünfen meiner Schüler mit aller Fertigkeit gemacht wurde.

Da ich übrigens ein unserm Erdstriche anpassendes Lehrbuch schrieb, wo der Mathematik so wenige Lehrstunden gewidmet sind: so war ich manchmal gezwungen, mich von meinem vorgesezten Plane in etwas zu entfernen. Eben dieses verdrang einige wichtige Sätze aus der Trigonometrie, und war auch die Ursache, daß ich beynahe die ganze Lehre des vierten Hauptstückes weiter herabstimmen muß-

te;

te: Ein Beweis, wie wenig oft die schönsten Entwürfe in der Ausübung taugen, welche so herrlich auf den Papiere, oder in dem Gehirne des Verfassers stehen, wenn sie nicht nach den Localumständen genau abgewogen werden.

Die Ausübung der Geometrie auf dem Felde u. a. scheinen mir ein besonders Bändchen zu verdienen. Und vielleicht wird auch eine oder die andere besondere Abhandlung, das, was hier der höheren Geometrie noch mangelt, ersezen.

Ich empfehle indessen jenen, welche sich ferner in der Mathematik bilden wollen, daß sie nun Herrn Hofrath Kästners Anfangsgründe, oder H. Hofrath Karstens lateinisches Lehrbuch in die Hände nehmen, diese wohl durchstudiren, dann werden sie Mathematiker werden.

Innhalt
des
II. Theils.

Erstes Hauptstück.
Von der Elementargeometrie.

I Abschnitt.
Allgemeine Begriffe und Grundsätze der Geometrie. S. 1.

II Abschnitt.
Von den Linien, Winkeln, und Figuren überhaupt. S. 10.

III Abschnitt.
Von den Figuren in Rücksicht auf ihre Winkel ins besondere. S. 31.

IV Abschnitt.
Von den Figuren in Rücksicht auf ihren Innhalt. S. 45.

V Abschnitt.
Von der Aehnlichkeit der Figuren, und den daraus entstehenden Verhältnissen. S. 66.

VI

VI Abschnitt.

Von den Körpern.

Von dem dichten Innhalte der Körper. S. 81.
Von den Oberflächen der Körper. S. 91.

Zweytes Hauptstück.

Von der ebenen Trigonometrie.

I Abschnitt.

Allgemeine Begriffe, und Erklärungen. S. 99.

II Abschnitt.

Allgemeine Grundsätze der trigonometrischen Rechnungen. S. 107.
Für die rechtwinklichten Dreyecke. S. 108.
Für die schiefwinklichten Dreyecke. S. 109.

III Abschnitt.

Trigonometrische Berechnungen.

Von den Logarithmen. S. 118.
Aufgaben für die rechtwinklichten Dreyecke. S. 122.
Aufgaben für die schiefwinklichten Dreyecke. S. 125.

Drittes Hauptstück.

Von den krummen Linien.

I Abschnitt.

Von den krummen Linien, und den Kegelschnitten überhaupt. S. 138.

II

II Abschnitt.

Von der Parabel. S. 146.

III Abschnitt.

Von der Ellipse. S. 159.

IV Abschnitt.

Von der Hyperbel. S. 175.

V. Abschnitt.

Von der Zykloide. S. 183.

Viertes Hauptstück.

Anwendung der Differential = und Integralrechnung auf die krummen Linien.

I Abschnitt.

Anwendung der Differentialrechnung.

Von der Bestimmung der Tangenten, und Normalen. S. 192.

Von der logarithmischen Linie. S. 197.

Von dem Krümmungsstrale. S. 199.

II. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung.

Berechnung der körperlichen Innhalte, und der Oberflächen. S. 203.

Ver=

Verkehrte Methode der Tangenten. S. 208.
Rektificirung der krummen Linien. S. 217.

III Abschnitt.

Gründe der Exponentialrechnung. S. 217.

Erstes Hauptstück.

Von der Elementargeometrie.

I. Abschnitt.

Allgemeine Begriffe und Grundsätze der Geometrie.

§. 1.

Eine stettige Größe (quantitas continua) heißt jene, deren Theile alle so zusammenhängen, daß, wo einer aufhört, gleich der andere anfängt, und zwischen des einen Ende und des andern Anfange nichts ist, das nicht zu dieser Größe gehört.

2) Mehrere auf diese Art zusammenhängende Theile bilden ein Ausgedehntes, oder wie Kästner sagt: Die geometrische Ausdehnung ist ein Raum, den eine stettige Größe ausfüllt.

§. 2.

1) Man denke sich, ein mathematischer Punkt fließe von a gegen b zu, (Tab. I. Fig. I.) und lasse in einem jeden Augenblicke ein Merkmaal seines Fließens zurücke: so werden diese Merkmaale, so wie §. 1. gesagt worden, zusammenhängen, eine stettige Größe bilden, die eine Ausdehnung in die Länge hat: d. i. es wird eine Linie erzeugt werden.

2) Nun fließe diese Linie a b gegen c abwärts, und lasse wieder in jedem Augenblicke ein Merkmaal von sich zurücke: so wird eine stettige Größe, die eine Ausdehnung in die Länge a b, und Breite a c hat: d. i. es wird eine Fläche entstehen.

3) Wenn sich nun auch die ganze Fläche a b c d gegen e herabbewegte, und wieder immerzu Merkmaale zurückeließe: so würde endlich eine stettige Größe daraus werden, welche eine Ausdehnung in die Länge a b, Breite a c und Tiefe a e hätte, und die man einen geometrischen Körper nennt.

a) Was also nur eine Ausdehnung in die Länge hat, ist eine Linie; was eine Ausdehnung in die Länge und Breite, eine Fläche; was in die Länge, Breite und Tiefe, ein Körper. Ein Punkt ist, was gar keine Ausdehnung hat. Man muß sich aber die Länge, Breite und Tiefe eines Körpers nicht als verschiedene Ausdehnungen vorstellen: es ist eine einzige, die Ausdehnung der Länge nämlich, die nur nach verschiedenen Richtungen an dem Körper betrachtet wird.

b) Man kann auch sagen: Der Punkt ist die Gränze der Linie; die Linie die Gränze der Fläche; die Fläche die Gränze des Körpers.

I. Anmerk. So wie wir die Entstehung der Linie durch die Bewegung eines fließenden Punktes begreifen, machen wir wirklich eine Linie auf das Papier. Die Spitze eines Bleystiftes oder einer Reißfeder vertritt die Stelle eines Punkts, welcher, indem wir ihn fortbewegen, in jedem Augenblicke Spuren seiner Bewegung, welche hier freylich lauter kleine Körperchen sind, zurückeläßt, die unmittelbar auf einander folgen, zusammenhängen, und eine stettige Größe bilden. Diese Linie kömmt dem Originale der mathematischen Linie desto näher, je spitziger das Werkzeug war, mit dem sie gezogen worden.

II. Anmerk. Weil der Punkt nur die Gränze der Linie ist, oder vielmehr, weil der Meßkünstler die Theile einer Linie als Größen ansehen muß, die sich immerfort vermindern lassen, oder als Differentiale, welche wieder ihre Differentiale höherer Ordnungen haben können, (I. Th. §. 158.) um daraus seine Bestimmungen zu machen: so sagt er, die Linie bestehe nicht aus Punkten, sondern aus Linien. Eben so bestehet ihm die Fläche nicht aus Linien, sondern aus Flächen; der Körper aus Körperchen, und nicht aus Flächen. D. i. die Differentiale der Fläche, aus welcher eine ganze Fläche *als* das Integral bestehet, sind selbst Flächen (I. Th. §. 170.) der Körper, Körperchen, wie wir noch zu seiner Zeit sehen werden.

Allein wenn wir die Sache genau betrachten: so ist doch wahr, daß der fließende Punkt in jedem Augenblicke nur eine Spur eines Punkts zurückelassen könne, und daß diese zurückgelassenen Spuren der Punkte unmittelbar aufeinander folgen müssen; sonst müßte er durch einem Sprunge von einem Orte zum andern kommen, ohne durch den Mittelweg zu gehen, welches wohl schlechterdings unmöglich ist. Denn ob wir uns schon bey der Bewegung den Ort, den der Punkt verläßt, und den er im nächsten Augenblicke einnimmt, in einer Entfernung denken, so ist doch richtig, daß er auch

selbst durch diese Entfernung müsse gegangen seyn, also auch da Merkmaale von sich zurückgelassen haben. D. i.

1) Im Grunde wird die Summe aller zurückgelassenen Merkmaale der unmittelbar aufeinander folgenden Punkte eine Linie seyn.

2) Da die Merkmaale der Punkte untheilbar, und eben so, wie der Zeugepunkt, selbst einfach sind, dennoch immer andere Stellen einnehmen, und unmittelbar auf einander folgen: (§. 1.) berühren sie sich, ohne deßwegen einander zu durchdringen.

3) Obschon diese Punkte selbst unausgedehnt sind, bilden sie doch lediglich durch ihre Aneinandersetzung eine ausgedehnte Linie.

Es folget also aus dem Begriffe der einfachen und untheilbaren Punkte gar nicht, daß sie deßwegen, weil sie unausgedehnt sind, wenn sie sich unmittelbar berühren, kein Ausgedehntes bilden können, sondern daß dieß selbst lediglich von ihrer Zusammensetzung abhänge; und wenn solche Punkte wirklich in der Natur vorhanden sind, so ist dieses auch von selben wahr: eine Anmerkung, von der wir in der Physik Gebrauch machen werden.

§. 3.

Messen heißt eine unbekannte Größe mit einer bekannten vergleichen.

a) Man muß daher allemal ein gewisses Maaß als bekannt annehmen, mit welchem man andere Dinge vergleichen will. So wie in jedem Lande ein Gewicht = Längen = Getränkmaaß ꝛc. festgesetzt ist, um daraus das Maaß und den Werth der Waaren, des Getraides, Getränkes ꝛc. zu bestimmen: nimmt der Meßkünstler einen gewissen Maaßstab an, nach welchem er die Länge der Linie mißt ꝛc.

§. 4.

Die Wissenschaft, welche nun das Maaß der stetigen Größen bestimmt, heißt Geometrie oder Meßkunst.

a) Ihre Gegenstände sind also Linien, Flächen, Körper ꝛc.

b) Sie wird von den Elementen des Euklides Elementargeometrie genannt, wenn sie sich nur mit den geraden Linien, den daraus entstehenden Figuren und dem Zirkel beschäftiget.

§. 5.

Neben den (§. 6 und §. 7 I. Th.) angeführten Grundsätzen der ganzen Mathematik hat die Geometrie noch diese zween für sich, die eben so evident sind, wie jene.

I. Welche einander decken, sind gleich (quae sibi congruunt, sunt aequalia).

II. Welche gleiches Maaß haben, sind gleich.

Anmerk. Die erste Erfindung der Geometrie wird insgemein den Aegyptiern zugeeignet, welche bey der jährlichen Ueberschwemmung des Nilflußes freylich genöthiget wurden, die Ausmessung ihrer Felder öfter zu wiederholen. Doch wie meistens die ersten Entdeckungen noch ungebildet sind, so waren es auch diese. Mehr haben hierinn die Griechen geleistet. Für den ersten, welcher eine Theorie der Meßkunst gemacht, die Linien und ihr Verhältniß betrachtet, und das ungleichseitige Dreyeck erfunden haben soll, wie Laertius schreibt, wird Euphorbus aus Phrygien angegeben. Nach ihm reiste 632

Jahre vor Christi Geburt Thales von Milet noch in seinem Alter nach Aegypten, und lernte von den Priestern dieses Landes unter andern die Höhe der Pyramyde aus ihrem Schatten messen. Er bewies am ersten, wie Proklus bezeugt, daß der Zirkel von dem Durchmesser in 2 gleiche Theile getheilt werde, und daß sich ein gleichseitiges Dreyeck darinn beschreiben lasse. Pythagoras begab sich, als er noch kaum 20 Jahre alt war, nach Aegypten, wovon er im 40ten Jahre nach Italien zurückkehrte. Allein da erst dieser den berufenen pythagorischen Lehrsatz, und selbst den Satz, daß die drey Winkel eines gradlinichten Dreyeckes 180° haben, erfunden hat: so müssen die geometrischen Kenntnisse der Aegyptier, wenn ihnen diese und des Thales Erfindungen unbekannt waren, wirklich sehr mittelmäßig gewesen seyn, und sich etwa kaum über gewisse praktische Handgriffe erstrecket haben; außer man wollte sagen, zu Salomons, oder gar zu Mosis Zeiten seyen auch die mathematischen Wissenschaften bey ihnen im Flor gewesen, hernach aber in Vergessenheit gerathen.

Bald nach dem Pythagoras, welcher im 80ten Jahre seines Alters 540 Jahre vor Christi Geburt starb, stiftete Sokrates die philosophischen Schulen zu Athen. Ob nun zwar dieser große Weltweise der Geometrie kündig war, so hatte er doch in Ausbreitung derselben nicht die Verdienste, welche sich sein berühmter Schüler Plato erwarb. Dieser nahm keinen in die Zahl seiner Zuhörer auf, der keine Kenntnisse in der Geometrie hatte, und täglich erklärte er, neben seinen philosophischen Lehrsätzen, auch einen geometrischen Satz. Plato starb 346 Jahre vor Christi Geburt, und man hat Ursache zu glauben, daß unter ihm und seinen Nachfolgern die Geometrie sehr im Flor gewesen sey. Hypokrates von Kius, nicht jener berühmte Arzt, sondern ein durch die Seeräuber verunglückter Kaufmann kam nach Athen, um sich über die Seeräuber zu beklagen: als er aber mit den Weltweisen bekannt wurde, verlegte er sich auf die Geometrie, und erwarb sich durch viele Erfindungen einen Namen. Von ihm schrieben sich die *lunulae Hypocratis* her, die er vollkommen geometrisch quadrirte.

Dieß war der Zustand der Geometrie im Griechenlande, als endlich 300 Jahre vor Christi Geburt Euklides auch zu Alexandrien anfieng, die Mathematik zu lehren. Nicht nur das Zeugniß des Diogenes Laertius, welcher alle Schriften des megarensischen Euklides aufgezeichnet, von den Elementen der Geometrie aber keine Meldung machet, sondern auch der angenehme, freundliche und liebenswürdige Karakter des alexandrinischen Euklides, wie ihn Pappus schildert (Herr von Leibniz und Neuton waren eben von dieser Gemüthsbeschaffenheit) beweisen, daß dieser große Geometer von dem Megarenser Euklides, einem finstern, mürrischen und zanksichtigen Manne wohl zu unterscheiden sey.

Euklides schrieb das erste Handbuch der Geometrie, welches aus 15 Elementen bestehet, in griechischer Sprache, das vortreflichste Werk, welches in dieser Wissenschaft noch geliefert worden, und das von den Kennern so hoch geschätzet wurde, daß es Dechales nach der heil. Schrift für das beßte Buch in der Welt hielt. Es wollten selbes zwar Petrus Ramus, zu seiner Zeit einer der berühmtesten Philosophen zu Paris, welcher sich der aristotelischen Philosophie sehr heftig widersetzte, und Lazarus Schoner, besonders in Rücksicht auf die Ordnung verbessern. Allein so sehr die 1599 zu Frankfurt am Mayn herausgekommene *Petri Rami Arithmetices libri duo, Geometriae 27 a Lazaro Schonero recogniti et aucti* von ihren Verfassern selbst über die Elemente des Euklides erhoben wurden, so wenig waren sie im Stande, den Ruhm derselben zu verdunkeln. Vielmehr fieng Euklides an in alle Sprachen übersetzt, und mit verschiedenen Anmerkungen und Erklärungen herausgegeben zu werden. Die erste gedruckte Auflage kam 1482 zu Venedig heraus. Nach diesem haben Joh. Schenkel, Prof. der Mathem. zu Tübingen; Christian Särlin und Konrad Dasipodius; David Gregori, Prof. zu Oxfort; Christoph Clavius; Isaak Barow, Prof. der Mathem. zu Kambrigde; Georg Friderich Bärmann, Prof. der Math. zu Wittenberg; P. Johann Lanz Prof. zu Ingolstadt 1617 theils verschiedene Ausgaben des Euklides veranstaltet, theils mit Erläuterungen versehen. S. Klemms mathem. Lehrb. 398. u. vollst. mathem. Lexikon. Bey dem W. Geometrie.

Merk-

Merkwürdig ist, daß seit der Erfindung der Buchdruckerkunst Euklides zum erstenmale in unserm Vaterlande von Erhard Ratdolt in Augsburg 1482 aufgelegt worden. Hr. Hofr. Kästner macht in einem Schreiben 1750 an den Herrn Kard. Quirini Meldung davon, als von einer ungemein seltenen Ausgabe; und Herr Prof. Klemm hat in seinen *amaenit. nou. lit.* als einem in der herzoglichen Regierungsrathsbibliothek zu Stutgard befindlichen Werke Nachricht gegeben?

Nach den großen Euklides erwarb sich Archimedes von Syrakus, 250 Jahre vor Christi Geburt den unsterblichen Ruhm eines der größten Mathematiker. Er bewies, daß die Kugel $\frac{2}{3}$ des Zylinders von einerley Höhe und Grundfläche sey; bereicherte die angewandte Mathematik, sonderbar die Mechanik und Hydrostatik mit vielen Erfindungen; und wurde bey der Einnahme der Stadt Syrakus, in mathematischen Betrachtungen vertieft, von einem Soldaten ermordet, den er mit diesen Worten von sich schafte: Soldat! verwirre mir diese Zirkel nicht. Aber das Angedenken dieses großen Meßkünstlers wurde von seiner eignen Vaterstadt, die er mit Ruhm gekrönet hatte, kaum auf die nächste Nachkommenschaft hinübergerettet, und bald darauf wurde er von seinen Landesleuten so sehr vergessen, daß sie nicht einmal mehr wußten, daß seine Grabstätte bey ihnen wären; und erst ein Ausländer von Arpinas mußte kommen, sie ihnen zu zeigen. Cicero erzählet dieses (*Quaest. tusc. L. V.*) sehr schön. Ich kann nicht umhin, die ganze Erzählung hier einzurücken.

„ Ex eadem vrbe (Syracusis) humilem homunculum, a pul-
„ uere et radio excitabo, Archimedem. Cuius ego quaestor ig-
„ noratum ab Syracusanis, cum esse omnino negarent, septum
„ vndique, et vestitum vepribus, et dumetis indagaui sepul-
„ crum. Tenebam enim quosdam senariolos, quos in eius mo-
„ numento esse inscriptos acceperam, qui declarabant, in sum-
„ mo sepulcro sphaeram esse positam cum cylindro. Ego au-
„ tem cum omnia collustrarem oculis (est enim ad portas Acra-
„ ganas magna frequentia sepulcrorum) animaduerti columel-
„ lam non multum e dumis eminentem: in qua inerat sphaerae
„ figura, et cylindri. Atque ego statim Syracusanis (erant au-

tem

„ tem principes mecum) dixi, me illud ipſum arbitrari eſſe,
„ quod quaererem. Immiſſi cum falcibus multi purgarunt, et
„ aperuerunt locum. Quo cum patefactus eſſet aditus, ad aduer-
„ ſam baſim acceſſimus, apparebat epigramma exeſis poſterio-
„ ribus partibus verſiculorum, dimidiatis fere. Ita nobiliſſima
„ Graeciae ciuitas, quondam vero etiam doctiſſima, ſui ciuis
„ vnius acutiſſimi monumentum ignoraſſet, niſi ab homine Ar-
„ pinate didiciſſet.

Im Deutſchlande hat Johann Chriſtoph Sturm im verfloſſenen Jahrhunderte den Anfang gemacht, die Mathematik zu verbreiten. Mehr hat hierinn noch der Freyherr von Wolf geleiſtet, deſſen mathematiſche Schriften nicht einmal genennt zu werden brauchen. Er iſt aber in einigen Lehren z. B. der Aehnlichkeit der Dreyecke von der euklideiſchen Schärfe abgewichen: aber vielleicht kann ihm dieß zu einem beſondern Verdienſt angerechnet werden. Da in den deutſchen Schulen und Univerſitäten kaum der Name der Mathematik bekannt war: ſo that er ſehr weislich, daß er in ſeinen Anfangsgründen nur wenig, und dieß auf die leichteſte Art vortrug. Deutſchland wird den Freyherrn von Wolf noch immer mit Hochachtung nennen, wenn die Nämen ſeiner meiſten Verächter nur noch in den Inſektenverzeichniſſen dauern werden, die der Fleiß deutſcher Litteratorn ſammelt, ſagt Herr Hofrath Käſtner.

Auf Wolfen folgte Herr Hauſen zu Leipzig, der ſchon mehr Schärfe und Gründlichkeit in ſeine Schriften brachte. Aber man hatte noch keine ſo große Schritte in der Geometrie gemacht, daß er allgemein brauchbar werden könnte. Erſt dem geheimen Rath von Segner und Hofr. Käſtner war es vorbehalten, den Ruhm der Deutſchen in der Meßkunſt zu einen Grad der Vollkommenheit zu bringen, den beynahe keine von den auswärtigen Nationen erreicht zu haben ſcheint.

II. Ab-

II. Abschnitt.

Von den Linien, Winkeln und Figuren überhaupt.

§. 6.

1) Die Gegend, oder der Punkt, nach welchen die Theile einer Linie zuliegen, bestimmt ihre Richtung.

2) Wenn alle Theile einer Linie (Tab. I. Fig. II.) a c, c d, d e immer einerley Richtung haben: D. i. nach der nämlichen Gegend b zuliegen, ist sie eine gerade Linie.

3) Eine krumme Linie aber, wenn kein Theil mit dem andern einerley Richtung behält, wie (Tab. I. Fig. IV.) wo in der Linie a e n m, a b die Richtung von a; e c die Richtung von e; n d die vom n ist: also jeder Theil eine andere Richtung hat.

a) Von den Punkten a und b (Tab. I. Fig. II.) wird also die Lage (positio); von den zween Endepunkten a e aber die Länge (magnitudo) einer geraden Linie bestimmt.

b) Zwischen zween Punkten ist nur eine gerade Linie möglich.

c) Die krumme Linie unterscheidet sich von der Zusammenfügung gerader Linien (Tab. I. Fig. III.) in zwey Stücken. 1): daß sich dort kein gerader Theil angeben läßt, wie hier a b, b c, c d. 2): daß

mon

man auch in der ersten nicht einmal angeben kann, wie weit die Richtung des beschreibenden Punktes in jedem Augenblicke von der Richtung im nächstvorhergehenden abweiche.

d) Nichts desto weniger können wir jede krumme Linie, als eine Zusammensetzung aus unendlichvielen, und eben so kleinen geraden Linien, oder Differentialen ansehen, die eben deßwegen, weil sie unendlichklein sind, eine beständige krumme Linie ausmachen. Wir werden dadurch in Stand gesetzt, verschiedene Bestimmungen für die krummen Linien zu machen. S. I. Th. §. 153. Anmerk.

e) Die Länge der geraden Linien bestimmen wir durch Ruthen, davon eine im geometrischen Maaße 10 Schuhe hält, wovon ein Schuh 10 Zolle; ein Zoll in 10 Linien eingetheilt wird. Man drückt die Ruthen durch °, die Schuhe durch ′, die Zolle durch ″, die Linien ‴ aus. Z. B. 20° 1′ 9″ 8‴.

Anmerk. Der Freyherr von Wolf heißt jene eine gerade Linie, in der jeder Theil dem Ganzen ähnlich: eine krumme, worinn kein Theil dem Ganzen ähnlich ist. Es ist dieses zwar richtig, aber eben kein neuer Vortheil für die Geometrie, wie Herr Hofrath Kästner anmerkt. Anfangsgr. der Geometrie. §. 6. Anmerk.

Vielleicht läßt sich wohl gar von der geraden Linie kein bestimmter Begriff geben. Mann könnte etwa besser mit Hrn. von Segner sagen: Jedermann weis, was eine gerade Lini ist; krumm ist jene, in welcher kein Theil gerade ist.

§. 7.

§. 7.

1) Wenn sich eine gerade Linie c e (Tab. I. Fig. V.) um einen unbeweglichen Punkt so lange herumbewegt, bis sie den Ort e wieder erreicht, wovon sie ausgegangen ist: so entsteht ein Kreis oder Zirkel (circulus). 2) Die dadurch entstandene krumme Linie e n b d a m heißt der Umkreis (Peripheria, circumferentia). Ein Theil n b davon ein Bogen (arcus). c der Mittelpunkt (centrum). Eine jede gerade Linie vom Mittelpunkte an den Umkreis, wie c e, c b, c d ꝛc. ein Stral (radius) oder Halbmesser. Die von einem Punkte der Peripherie zum andern gezogene gerade Linie m n, Sehne (chorda); und wenn sie durch den Mittelpunkt gehet, Durchmesser (diameter). Berührt eine gerade Linie t T die Peripherie des Kreises nur in e, ohne ihn zu schneiden, so ist sie eine Tangente (tangens). Der zwischen einen Bogen und der Sehne eingeschlossene Theil m e n wird endlich ein Abschnitt (segmentum); der Raum aber, welchen zween Stralen m c, n c und der Bogen m e n in sich begreifen, ein Ausschnitt (sector) genannt. 3) Die Peripherien aller Kreise werden in 360 Grade eingetheilt, wovon jeder Grad 60 Minuten; eine Minute 60 Sekunden; eine Sekunde 60 Terzen ꝛc. enthält. So wie im Längenmaaße die Ruthen, Schuhe, Zolle ꝛc. werden auch hier die Grade, Minuten, Sekunden ꝛc. ausgedrückt. Man schreibt z. B. 45° 36′ 5″ 59‴ ꝛc., und berechnet sie nach der Sexagesi-

mal-

malrechnug. (I. Th. §. 65. Anmerk.) Weil die ganze Zirkelperipherie 360° hält, so hält die halbe 180°.

a) Weil der Stral c e, durch dessen Bewegung der Kreis entstehet, immer der nämliche bleibet (I. Th. §. 6. 1.): so stehen 1) alle Punkte der Peripherie vom Mittelpunkte gleichweit ab. 2) sind alle Halbmesser des nämlichen Zirkels einander gleich: oder e c = c d; a c = c b. Der Durchmesser besteht aber aus zween Halbmessern: also sind auch alle Durchmesser einander gleich.

b) Es ist schon im I. Th. §. 162. gezeigt worden, daß die größte Ordinate des Zirkels dort sey, wo die Abscisse dem halben Durchmesser gleich ist; eine Ordinate ist aber nichts anders, als eine Sehne, und dort, wo die Abscisse dem halben Durchmesser gleich ist, wird sie selbst zum Durchmesser: also ist der Durchmesser die größte Sehne des Zirkels. Ich werde es aber weiter unten zum Ueberfluße doch noch beweisen.

c) Der Durchmesser theilt daher den Zirkel in zween gleiche Theile.

Anmerk. Um ein allgemeines Maaß zu haben, sind alle Zirkel in 360° eingetheilt worden. Große und kleine Zirkel haben also gleichviele, aber nicht gleichgroße Grade. Sie sind in einem kleinen Zirkel oft etwelche Linien, oder Zolle groß; da sie in einem andern Schuhe, mehrere Meile, oder gar Erddurchmesser enthalten. Z. B. ein Grad eines größten Zirkels der Erde begreift in sich 15 deutsche Meile.

§. 8.

1) Die Neigung zwoer Linien a c, a b (Tab. I. Fig. VI.) ꝛc. ist ein Winkel (angulus); c heißt die Spitze (vertex); a c und a b seine Schenkel.

2) Neigt sich (Tab. I. Fig. VII.) eine Linie a c auf die eine Seite c b nicht stärker, als auf die andere c d: so ist a c auf b d senkrecht, oder lothrecht (perpendicularis, normalis), die, wenn b d eine Horizontalfläche ist, auch Vertikallinie heißt.

3) Der Winkel, den eine Perpendikularlinie mit einer andern macht, wie hier x und y, ist ein rechter Winkel; ein stumpfer (angulus obtusus) x (Tab. I. Fig. VIII.) ist größer; ein spitziger y aber (angulus acutus) kleiner als der rechte. Das Maaß des Winkels ist der aus der Spitze (Tab. I. Fig. VI.) beschriebene Bogen b c, welchen seine Schenkel a c und a b abschneiden.

§. 9.

1) Winkel, die aus einem und eben demselben Punkte einer geraden Linie b d (Tab. I. Fig. VII. und VIII.) gemacht werden, heißen Nebenwinkel (anguli contigui), und wenn ihrer nur zween sind, (anguli deinceps positi).

2) Jede zween Nebenwinkel (anguli deinceps positi) sind zween rechten, oder 180° gleich. (Tab. I. Fig. VIII.) oder

Bew.

Bew. Es ist das $x + y = 180° = 2\,R$

Maaß von $x = a\,b$

von $y = a\,d$

+ (I. Th. §. 23. e.) $x + y = a\,b + a\,d$

aber $a\,b + a\,d = 180° = 2\,R$

also $x + y = 180° = 2\,R$

a) Wenn also mehr Nebenwinkel auf einer Linie stehen: sind sie auch zween rechten, oder 180° gleich; weil man auch nur einen halben Zirkel darauf beschreiben kann.

b) Sind die zween Nebenwinkel x und y einander gleich, folglich a c auf b d perpendikulär (Tab. I. Fig. VII.): so sind beyde rechte Winkel.

Denn $x + y = 2\,R = 180°$

wenn nun $x = y$

so ist $2\,x = 2\,R = 180°$

also $x = \frac{2\,R}{2} = R = 90°$

Und weil $x = y$; so ist auch $y = R$. Wechselweise, wenn aus zween Nebenwinkeln einer ein rechter Winkel ist, ist auch der andere einer, und beyde sind einander gleich, folglich auch a c senkrecht.

c) Jede zween Nebenwinkel sind also zween rechte Winkel, oder doch zween rechten gleich.

d) In einem Zirkel können nicht mehr, als 4 rechte Winkel seyn, weil 90×4 schon $= 360°$ ist, und nur zween Durchmesser, oder vier Halbmesser können aufeinander senkrecht stehen.

e)

e) Wenn einer dieser Winkel bekannt ist, so weis man auch den andern. Es sey x bekannt: so ist $y = 180^\circ - x$.

f) Alle rechte Winkel sind einander gleich; weil sie gleiches Maaß, nämlich einen Zirkelbogen von 90° haben. (§. 5. II.)

§. 10.

1) Vertikal- oder Scheitelwinkel (anguli ad verticem oppositi) sind jene, deren verlängerte Schenkel im Scheitel einander durchkreuzen. x und u (Tab. I. Fig. IX.) sind solche.

2) Die Scheitelwinkel sind einander gleich. Oder

$$x = u$$

Bew. $x + y = 180^\circ$, $u + y = 180^\circ$ (§. 9.)

also (I. Th. §. 6. 4.) $x + y = u + y$

$-y$ $\quad x = u$

a) Aus dem einzigen gegebenen Winkel x lassen sich daher alle vier x, u, y und m angeben: denn es ist $u = x$; $y = 180 - x$ (§. 9. e.) und $m = y$ als seinem Scheitelwinkel.

§. 11.

Eine Figur ist ein Raum, der allenthalben begränzt, oder mit Linien eingeschlossen ist.

a)

a) Aus zwoen geraden Linien kann also zwar ein Winkel, aber keine Figur entstehen: wohl aber aus einer krummen z. B. aus der Zirkellinie.

b) Die geradlinichten Figuren haben von der Zahl der einschließenden Seiten ihre Benennungen. Die einfachste davon ist das Dreyeck, welches wir nur jetzt in etwas betrachten wollen.

§. 12.

Eine dreyseitige Figur heißt also ein Dreyeck (Triangulum). Nach seinen Seiten betrachtet ist das Dreyeck a b c (Tab. I. Fig. X.) gleichseitig (aequilaterum) wenn alle drey Seiten gleich sind; gleichschenklicht (aequicrurum, isoscelicum) wenn es nur zwo Seiten a b, a c sind (Tab. I. Fig. XI.); ungleichseitig (scalenum) wenn alle Seiten ungleich sind.

2) Den Winkeln nach ist es rechtwinklicht (rectangulum) wenn ein Winkel b (Tab. I. Fig. XIII.) ein rechter; stumpfwinklicht (obtusangulum, amblygonum) wenn einer z. B. b (Tab. I. Fig. XII.) ein stumpfer ist; spitzwinklicht (acutangulum, oxygonum) wenn alle drey Winkel a b c (Tab. I. Fig. X.) spitzig sind, und falls die drey Winkel einander gleich sind, so wird das letzte auch ein gleichwinklichtes Dreyeck (triangulum aequiangulum) genannt.

Anmerk. Es wird zwar dieses alles schon in unsern Gymnasien vorausgeschickt. Ich wollte sie aber doch kurz anführen, um die nöthigen Begriffe alle beysammen zu haben. So ist es

beynahe überflüßig zu sagen, daß in jedem Dreyecke eine Linie z. B. b c (Tab. I. Fig. X., XI. ꝛc.) als die Grundlinie (basis) angesehen wird, und daß alsdann die übrigen zwo Seiten Schenkel (crura) heißen; daß bey einem rechtwinklichten Dreyecke die Seite a c (Tab. I. Fig. XIII.), welche dem rechten Winkel gegenüber stehet, Hypothenuse (Hypothenusa); die übrigen zwo aber Katheten oder Lothe (Catheti) genannt werden. ꝛc.

§. 13.

Damit aus drey Seiten ein Dreyeck werden könne, müssen jede zwo Seiten zusammengenommen größer seyn als die dritte. Denn wären sie ihr gleich oder gar kleiner: so würden sie entweder eine Oefnung zurückelassen, gleichwie b d und c e, oder gar in der geraden Linie b c ohne Winkel zusammenfallen. (Tab. I. Fig. XIV.)

a) In jedem Dreyecke a b c ist also $ab + ac > bc$; $bc + ac > ab$. ꝛc.

b) Von einem Punkte a auf den andern c, ist die kürzeste Linie, die möglich ist, nur eine gerade Linie a c. (Tab. I. Fig. XVI.) Denn, entweder gehen zwo gerade a b und b c von einem Punkte a durch b auf c (Tab. I. Fig. XVI.) woraus das $\triangle$ a b c entstehet, und schon $ab + bc > ac$ ist; oder man denke sich was immer für eine krumme Linie a m b n c hinüber; so läßt sich ein Dreyeck a b c darauf machen, wo dann wieder $ab + bc > ac$. a c ist also allemal von a auf c die kürzeste Linie, die möglich ist.

c)

c) Von einem Punkte zum andern kann daher nur eine einzige gerade Linie gezogen werden. Eine jede andere würde länger, und also eine krumme Linie werden müssen.

§. 14.

Ein Dreyeck wird bestimmt 1) durch zween Winkel b und c, und ihre eingeschloßne Seite b c (Tab. I. Fig. XIV.).

2) Durch zwo Seiten a b, a c und dem eingeschloßnen Winkel a (Tab. I. Fig. XV.).

3) Durch drey Seiten a b, a c, b c (Tab. I. Fig. XVI.) deren jede zwo zusammen größer sind, als die dritte, oder a b + b c > a c.

Bew. des I. Wenn die Seite b c (Tab. I. Fig. XIV.) und durch die Stücke d b, e c auch die Winkel bey b und c gegeben sind: so werden die verlängerten Seiten b d, e c sich nur in dem einzigen Punkte a begegnen; weil die Richtung beyder nach a geht (§. 6. a.) also ein einziges Dreyeck bestimmen können.

Bew. des II. Wenn die gegebenen Seiten a b, a c (Tab. I. Fig. XV.) einen bestimmten Winkel a machen: so ist von b auf c keine andere gerade Linie möglich, als b c (§. 13. c.) also auch aus den gegebenen zwo Seiten und ihrem eingeschloßnen Winkel kein anders Dreyeck, als a b c.

Bew. des III. Man setze a b und a c bey a zusammen. Solle nun b c mit ihnen die dritte Seite

ausmachen, so müssen a b und a c einen gehörigen bestimmten Winkel machen, die Seite b c einzuschließen; es wird aber nach vorherigem Beweise durch zween Seiten und dem eingeschloßnen Winkel ein Dreyeck bestimmt: also auch durch drey gegebene Seiten: oder die dritte gegebene Seite bestimmt selbst den Winkel, welchen die ersten zwo einschließen sollen.

a) Wenn also in zweyen oder mehreren Dreyecken zween Winkel sammt der eingeschlossenen Seite; oder zwo Seiten, und ihr eingeschlossener Winkel; oder gar alle Seiten gleich sind: so sind die Dreyecke einander gleich; denn wenn man sie gehörig aufeinander legte: würden sie einander vollkommen decken. (§. 5. I.)

b) Ein gleichseitiges Dreyeck wird durch eine einzige Linie; ein gleichschenklichtes, durch zwo, nämlich durch einem Schenkel und die Grundlinie bestimmt.

c) In einem Dreyecke sind die Winkel, welche gleichen Seiten entgegengesetzt sind, gleich.

d) Darum sind zween Winkel b und c an der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyeckes (Tab. I. Fig. XI.) einander gleich, weil sie gleichen Schenkeln oder Seiten entgegenstehen. In einem gleichseitigen Dreyecke (Tab. I. Fig. X.) sind es aus eben diesem Grunde alle drey.

Anmerk. Ich bin in diesem §. des Hrn. Prof. Klemms mathem. Lehrbuch §. 422 — 433 gefolget, wo er die Gleichheit der Dreyecke aus ihrer Bestimmung durch die Seiten und Winkel, und nicht diese aus der vorausbewiesenen Gleichheit herholet, wie Hr. Hofr. Kästner. Uebrigens erinnert Klemm

selbst,

selbst, daß man bey allen diesen Beweisen, den Grundsatz des (§. 6. I.) immer vor Augen haben, oder wohl gar solche zwo ähnliche Figuren von Papier ausschneiden solle, um sie aufeinanderlegen, und auf diese Art sehen zu können, ob, und wie sie sich einander decken.

§. 15.

1) Figuren, die gleiche Räume einschließen, oder gleiche Größe haben, sind gleich, wenn schon ihre äußerliche Gestalt ungleich ist.

2) Ist die äußerliche Gestalt gleich, und nur die Größe verschieden, so sind sie ähnlich.

3) Figuren, in denen beydes, Größe und äußerliche Gestalt gleich ist, sind ähnlich und gleich.

a) Zwey Dreyecke sind also schon ähnlich, wenn nur ihre Winkel gleich sind. So ist (Tab. I. Fig. XIII.) $\triangle$ a e b ∽ $\triangle$ b e c. Dieß gilt auch für die übrigen Figuren. Sollen aber zwo Figuren ähnlich und gleich seyn, müssen Winkel und Seiten gleich seyn.

b) Wechselweise, wenn zwo Figuren ähnlich und gleich sind: so sind auch ihre Seiten und Winkel gleich.

§. 16.

1te Aufg. 1) Auf die Linie b c ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben. (Tab. I. Fig. X.) 2) Aus der Grundlinie b c, und einer Seite a b ein gleichschenklichtes Dreyeck machen.

Aufl. des 1.) Mit der Oefnung b c beschreibt man aus b und c die Zirkeldurchschnitte in a: werden nun wirklich von a auf b und c Linien gezogen: so sind alle drey Seiten a b, a c, b c Stralen des nämlichen Zirkels: also das Dreyeck gleichseitig.

Aufl. des 2.) Mit dem Strale a b werden wieder aus b und c Durchschnitte in a gemacht: so sind die Schenkel a b, a c, wenn man sie wirklich zieht, Stralen eben desselben Zirkels: also das Dreyeck gleichschenklicht.

§. 17.

2te Aufg. 1) Einen gegebenen Winkel a (Tab. I. Fig. XVIII.) 2) eine Linie b c (Tab. I. Fig. XI.) in zween gleiche Theile theilen.

Aufl. des 1ten. Mit einer und eben derselben Zirkelöfnung a d = a e beschreibt man aus den Punkten d und e der Seiten a b, a c die Durchschnitte in m (Tab. I. Fig. XVIII.). Ziehet aus dem Durchschnittspunkte m auf a eine gerade Linie, die den Winkel in zween gleiche Theile theilet. Weil a d = a e; d m = e m, als Stralen eben desselben Zirkels, und a m = a m, so sind die Dreyecke a d m, a e m gleich (vorherg. §. 3 und a) folglich auch e a m = d a m d. i. der Winkel a ist in zween gleiche Theile getheilt.

Aufl. des 2ten. Aus b und c werden mit gleicher Oefnung des Zirkels zween Durchschnitte in a und o gemacht: die gerade von a auf o gezogene Linie theilet b c in zween gleiche Theile b u = c u. Denn weil

b o

b o = c o; a o = a o und nach der Konstruktion, oder (§. 16. 2 Aufl.) a b = a c: so ist das △ a b o = a c o, und nach der ersten Aufl. der Winkel b a o = c a o gesetzt: es sind aber gleichen Winkeln gleiche Seiten entgegen: also auch b u = c u. D. i. b c ist in 2 gleiche Theile getheilt.

a) Ein von d auf e (Tab. I. Fig. XVIII.) gehender Zirkelbogen würde eben auf diese Weise in zween gleiche Theile getheilt. Auch läßt sich ein halber Theil eines Winkels a wieder in zween gleiche Theile abtheilen. Es ist daher die Theilung eines jeden Winkels in 2, 4, 8 Theile nach geometrischer Art möglich: aber die in drey Theile (trisectio anguli) kann nur durch die höhere Geometrie verrichtet werden.

§. 18.

3te Aufg. 1) Auf einem gegebenen Punkte c der Linie b d (Tab. I. Fig. VII.) 2) aus einem gegebenen Punkte auf die Linie b d eine senkrechte Linie errichten.

Aufl. des 1ten. Mit einerley Zirkelöfnung bestimmt man zween gleichweit von c abstehende Punkte m, n (Tab. I. Fig. VII.) beschreibt dann wieder mit einerley Oefnung aus m und n die Durchschnitte in a, die aus dem Durchschnittspunkte a auf c gezogene gerade Linie ist senkrecht; denn weil c m = c n; m a = n a: so neiget sich die ganze Linie a c mehr nicht auf eine Seite m, als auf die andere n d. i. sie ist senkrecht.

Aufl.

Aufl. des 2ten. Man setzt den Zirkel in a ein, und macht mit gleicher Zirkelöfnung die Bögen e, c (Tab. I. Fig. XVII.) und aus den Punkten, in welchen diese Bögen die Linie b d schneiden, wieder mit einerley Oefnung in o zween Durchschnitte. Die von a gegen o hingezogene gerade Linie a u o ist bey u auf b d senkrecht. Denn weil e o = c o; a e = a c: so ist nach (§. 17. 2.) das Stück e c der Linie b d durch a u o in zween gleiche Theile getheilt: also e u = c u: weil also auch a e = a c, und a e u = a c u: so stehet a u nicht weiter von e ab, also von c d. i. sie ist auf e c, und auch auf b d senkrecht.

a) Da a c, a u (Tab. I. Fig. VII. und XVII.) gerade und senkrecht sind: so ist einleuchtend, daß alle Punkte der ganzen Linien a c, a u von jeden zween Punkten der Linie b d, die von c, oder u gleichweit abstehen, auch gleichweit entfernt seyn müssen.

b) Weil von a auf c, oder auf u nur eine gerade Linie möglich ist (§. 13. c.) so ist auch auf einem bestimmten Punkte einer Linie, und aus einem bestimmten Punkte auf eine Linie, nur eine einzige Perpendikulär möglich.

c) Die Grundlinie des gleichschenklichten Dreyeckes a b c (Tab. I. Fig. XI.) wird durch die aus a auf sie gefällte senkrechte Linie in zween gleiche Theile, und das Dreyeck selbst in zwey gleiche Dreyecke x = y getheilt. Das gleichseitige kann allenthalben als gleichschenklicht angesehen werden: folglich theilet die aus

jeder

jeder Spitze a, b oder c (Tab. I. Fig. X.) auf die entgegengesetzte Seite hingezogene Perpendikulär die Grundlinie desselben, und selbst das ganze Dreyeck in zween gleiche Theile.

§. 19.

In was immer für einem geradlinichten Dreyecke sind zween Winkel zusammengenommen kleiner als zween rechte oder 180° (Tab. II. Fig. I.) $m + n < 180° < 2R$.

Bew. Aus dem Winkel B des Dreyeckes B A C ziehe man eine gerade Linie B e f also fort, daß $Be = ef$, und $Ae = eC$ werde (§. 17. 2.) ziehe dann auch f C, und verlängere B C bis d: so ist

Weil $Be = ef$
$Ae = eC$ aus der Konstrukt.
$x = y$ (§. 10. 2.)
also nach (§. 15. a.) $\triangle ABe = \triangle efC$.

Würden nun diese zwey gleiche Dreyecke so aufeinander gelegt, daß der Winkel x den Winkel u deckte: so würde auch der Winkel m den Winkel o, und der Winkel f den Winkel b decken:

also $o = m$
Nun ist $o < o + n$
also auch $m < o + n$
beyderseits $+ r$ $m + r < o + n + r$
aber $o + n + r = 180$ (§. 9. a.)
folglich $m + r < 180 < 2R$.

Die=

Dieser Beweis kann von jeden dreyen Seiten eines Dreyeckes gemacht werden. Es ist also der Satz überhaupt, und von jeden zweenen Winkeln aller Dreyecke richtig.

a) Wenn daher zwo Linien b d, c e (Tab. I. Fig. XIV.) am Ende einer Linie b c ein Dreyeck bilden, oder irgendwo begegnen sollen: so müssen ihre eingeschlossenen Winkel $x + u < 180°$ seyn.

§. 20.

1) Zwo oder mehrere gerade Linien a b, c d, welche in einer Ebene liegen, sind parallel oder gleichlaufend (Lineae parallelae), wenn sie beyderseits auch unendlich fortgezogen niemal zusammenstoßen (Tab. II. Fig. II.).

2) Nähern sich zwo Linien immer einander: so heißen sie **zusammengehende** (lineae conuergentes) entfernen sie sich aber immer: so werden sie **auseinanderfahrende Linien** (lineae diuergentes) genannt.

a) Aus diesen Begriffen folget, daß Parallellinien wie immer verlängert nie; wohl aber die zusammengehenden und auseinanderfahrenden Linien endlich einen Winkel machen können: wenn jene vorwärts; und diese rückwärts fortgezogen werden.

Anmerk. Es geben zwar einige andere Begriffe von den Parallelen: aber so wie er hier ist, hat ihn Euklides *L. I. Defin.* 32. Der Hr. geheime Rath von Segner, Hr. Hofr. Kästner, Hr. Hofr. Karsten, Hr. Prof. Klemm geben durchgehends eben diesen; indem er einmal alles erschöpft, was Parallelen sagen wollen.

§. 21.

Wenn zwo Linien a b, c d (Tab. II. Fig. II.) von einer dritten so durchschnitten werden, daß

1) Die zween inneren auf einer Seite befindlichen Winkel (anguli interni ad eandem partem) $y + z = 180°$:

2) Der äußere Winkel x dem inneren entgegengesetzten z (angulus externus interno ad eandem partem opposito) gleich sind, oder $x = z$:

3) Auch die zween Wechselwinkel (anguli alterni) D. i. $u = z$ werden: so sind a b, c d gleichlaufend.

Bew. des 1ten. Wenn $y + z = 180°$: so können a b und d c weder zusammengehen; denn hernach müßten sie sich einmal begegnen, und ein Dreyeck machen, also nach (§. 19.) $y + z < 180°$ seyn. Weder auseinanderfahren; denn hernach müßten sie rückwärts bey a c ein Dreyeck machen: also $u + o < 180°$: folglich $y + z > 180°$ seyn. Wenn also $y + z = 180°$: müssen sie parallel seyn.

Bew. des 2ten. Oder wenn $x = z$; so sind a b und c d gleichlaufend. Es ist

nach (§. 9. 2.)	$x + y = 180°$
Wenn nun auch	$x = z$
so ist auch	$z + y = 180.$

Also die Linien a b, c d parallel, weil sie nirgends zusammen oder auseinandergehen.

Bew.

Bew. des 3ten. Es ist wieder nach (§. 9. 2.)

$$u + y = 180$$

wenn also $u = z$

so ist auch $z + y = 180$

also wieder a b und c d gleichlaufend.

Anmerk. So beynahe beweiset Euklides Propos. 27. Theor. 18. und Propos. 28. Theor. 19.; Hr. Hofr. Kästner in den Anfangsgr. der Geometrie 11. Lehrs., und Hr. Prof. Klemm in seinem Lehrb. §. 456. die drey Sätze selbst aus dem euklideischen Begriffe der Parallellinien. Die Sätze umgekehrt werden insgemein aus den Regeln der Konversion hergeleitet: es beweiset sie aber Euklides L. I. Prop. 29. Theorem. 20. besonders, beynahe wieder eben so, wie ich es gleich itzt thun werde. S. Hrn. Hofr. Kästners Vorrede zu den Anfangsgr. der Arithm. und Geom.

§. 22.

Wenn zwo Linien a b, c d parallel sind: so ist

1) $y + z = 180°$

2) $x = z$

3) $u = z$

Bew. des 1ten. Wäre $y + z < 180°$: so würden die Linien zusammenlaufen; wäre $y + z > 180°$: würden sie auseinanderfahren: folglich nie parallel seyn; weil sie es also sind, muß $y + z = 180°$ seyn.

Bew. des 2ten. Weil bey den Parallellinien

$$y + z = 180°$$

und auch $x + y = 180°$

so ist $x + y = y + z$

folgl. — y $x = z$

Bew.

Bew. des 3ten. Es ist hier wieder

$$\begin{array}{ll} & y + z = 180^\circ \\ \text{auch ist} & u + y = 180^\circ \\ \text{folgl.} & u + y = y + z \\ \text{und} - y & u = z \end{array}$$

a) Wenn also zwo Parallellinien a b, c d, oder m b, n d von einer dritten e f geschnitten werden, oder auf derselben zu stehen kommen (Tab. II. Fig. III.) so müssen sie entweder mit e f zween rechte Winkel, wie a b, c d machen, oder davon gleichweit abweichen, wie m b, n d.

b) Parallelen zwischen Parallelen sind gleich: denn wenn nicht nur a b, c d, sondern auch a c, b d (Tab. II. Fig. IV.) parallel sind: so ist y = o, und u = z; b c = b c: also △ a c b = △ b c d (§. 15. a) folglich die Parallelen a b und c d, und also auch alle Perpendikulären zwischen den Parallelen a b, c d einander gleich, oder a c = b d.

c) Zwo gleichlaufende Sehnen schneiden gleiche Zirkelbögen ab, welches noch mehr wird bewiesen werden.

d) Die in diesen zween Paragraphen für zwo Parallelen bewiesenen Sätze sind auch für 3, oder wie viel immer wahr, die von einer andern durchschnitten werden.

e) Durch einem gewissen Punkte b auf eine gegebene Linie e f eine Parallel zu machen, darf man entweder nur b c, und dann auch m n so ziehen, daß der Winkel x = y werde; oder aus den Punkten c, d mit einerley Zirkelöfnung Bögen beschreiben: wenn diese die Li=

Linie m n nur berührt, so ist sie nach (§. 20. 1.) auf e f parallel.

Anmerk. Der Hr. Baron von Wolf giebt folgenden Beweis für den ganzen Satz dieses §. Wenn man nach §. 18. auf die Durchschnittspunkte c und b die Perpendikulärlinien a c, b d errichtet (Tab. II. Fig. IV.) so ist a c = b d; b c = b c; der Winkel a = d, als zween rechte: also △ a c b = △ b c d: folglich u = z; denn diese würden sich bey gehöriger Aufeinanderlegung der Dreyecke decken. Ist einmal bewiesen, daß u = z: so beweiset man leicht, daß auch x = z (Tab. II. Fig. II.) und y + z = 180° sey. Allein daß alle Perpendikulärlinien zwischen Parallelen gleich sind, ist erst eine Folge aus dem Beweise, und scheint hier blos angenommen zu seyn. Vielleicht läßt er sich aber dennoch rechtfertigen. Wenigst spricht ihm doch Klemm (Lehrb. §. 458.) die mathematische Schärfe nicht ab. Man pflegt auch den Satz mechanisch so zu beweisen. Wenn sich die Linie c d aufwärts bewegt: so würde a b von c d, und der Winkel x von z gedeckt werden: also x = z seyn; woraus sich wieder leicht zeigen läßt, daß auch u = z, und y + z = 180° sey. Hr. Klügel, nun Prof. zu Marburg hat die gelehrte Geschichte dieses Grundsatzes verfaßt, unter dem Titel: *Conatuum praecipuorum Theoriam parallelarum demonstrandi recensio*, und unter Hrn. Hofr. Kästner vertheidigt. Er führt 28 Versuche an, die Theorie der Parallelen zu beweisen, die alle im Drucke erschienen sind. S. Kästners Vorrede zu den Anfangsgr. der Arithm. und Geometrie.

III. Ab-

III. Abschnitt.

Von den Figuren in Rücksicht auf ihre Winkel in's Besondere.

§. 23.

Die drey Winkel eines jeglichen Dreyeckes zusammengenommen machen 180° oder zween rechte Winkel aus. D. i. (Tab. II. Fig. V.) $a + b + c = 180$.

Bew. Wenn man auf die Spitze c mit a b eine gleichlaufende m n macht, und b c verlängert: so ist nach (§. 9. a.)

$$c + x + o = 180° = 2 R$$

nun ist $x = a$ als Wechselw.

$\underline{o = b}$ als der äußere dem innern.

folgl. subst. $a + \overline{b + c} = 180° = 2 R$.

a) In einem Dreyecke hat also nur ein rechter, und um so viel mehr nur ein stumpfer Winkel Platz: denn wären zween rechte da, so müßte die Summe von allen dreyen > 180: also $> 2 R$ seyn, welches falsch ist.

b) Weil die drey Winkel eines gleichseitigen Dreyeckes auch gleich sind (§. 14. d): so hält jeder $\frac{180}{3} = 60°$.

c) Wenn in einem rechtwinklichten Dreyecke die zween Lothe gleich sind: so ist jeder spitzige Winkel an der Hypothenuse $= \frac{90}{2} = 45$; weil auch der rechte 90° hat.

d)

d) Ist in einem rechtwinklichten Dreyecke ein spitziger Winkel c bekannt: so ist der andere a = 90 — c. (Tab. I. Fig. XIII.) Ist in einem gleichseitigen a b c (Tab. I. Fig. X.) ein Winkel a bekannt: so weis man alle drey (§. 14. d). In einem ungleichseitigen aber muß man zween wissen, um den dritten zu finden. Z. B. es sey (Tab. I. Fig. XII.) $a = 35°$; $c = 40°$: so ist $b = 180 - 75 = 100°$.

§. 24.

Wenn man in was immer für einem Dreyecke die eine Seite b c (Tab. I. Fig. XIV.) verlängert: so ist der durch c m entstehende äußere Winkel y = den zween inneren entgegengesetzten. D. i.

$$y = a + b$$

Bew. nach (§. 9. 2.) ist	$x + y = 180°$
nach (§. 23.)	$a + b + x = 180°$
nach I. Th. (§. 6. 4.)	$x + y = a + b + x$
— x	$y = a + b$

a) Aus dem äußern Winkel y wissen wir also wieder die Summe der zween übrigen = a + b. Aber wenn das Dreyeck gleichschenklicht wäre, und sich die zween innere Winkel a, b an der Grundlinie befänden: so wären dadurch alle drey Winkel bekannt; Denn weil im gleichschenklichten Dreyecke der Winkel

	$a = b$
und	$y = a + b$
so wäre	$y = 2a$

also

also $$a = \frac{y}{2}$$

und $$b = \frac{y}{2}.$$

§. 25.

1) Wenn in einem Vierecke jede zwo Seiten einander parallel laufen, so heißt die Figur ein Parallelogram: sind die Seiten gleich, und die Winkel rechte, (Tab. II. Fig. VI.) ein vollkommenes Viereck (quadratum). Wenn aber zwo Seiten länger, als die zwo übrigen (Tab. II. Fig. VII.) und die Winkel rechte sind: so wird es ein Rechteck (rectangulum) oder auch ein länglichtes Viereck genannt.

2) Sind die Winkel schief, so heißt es ein schiefes Parallelogram; und wenn die Seiten gleich sind, eine Raute (rhombus); sind aber wieder zwo Seiten länger, als die zwo übrigen (Tab. II. Fig. VIII.) eine lange Raute (Rhomboides) ein verschobenes Rechteck. Andere Vierecke heißen ungleichseitige Vierecke, oder Trapeze (Trapezia) (Tab. II. Fig. IX.)

3) Ein ordentliches Vieleck (polygonum regulare) ist, das lauter gleiche (Tab. II. Fig. X.) ein unordentliches (polygonum irregulare) das ungleiche Seiten hat. (Tab. II. Fig. XI.)

§. 26.

1) Eine gerade Linie, die von einem Ecke einer Figur zu den andern gezogen wird, heißt eine Diagonallinie.

2) Alle Vielecke können durch die Diagonallinien in Dreyecke eingetheilt werden. (Tab. II. Fig. X. u. XI.)

§. 27.

1) Die vier Winkel aller vierseitigen Figuren haben miteinander 360°.

2) Die Parallelograme werden durch die Diagonal in zwey gleiche Dreyecke abgetheilt.

3) Wenn nur ein Winkel a (Tab. II. Fig. VI. und VII.) ein rechter ist: so sind es alle vier.

4) Die zween gegenüberstehenden Winkel eines schiefen Parallelogrames sind allemal einander gleich.

Bew. des 1) Alle vierseitige Figuren werden durch die Diagonal in zwey Dreyecke abgetheilt, oder

$$abcd = \triangle abc + \triangle bdc \text{ (T.II.F.VII.)}$$

aber $\triangle abc = 180°$

$\triangle bdc = 180°$

folgl. $abcd = 180° \times 2.$

Bew. des 2) Es ist der Winkel m des Dreyeckes abc = gleich dem Winkel n des Dreyeckes bcd (§. 22. 3.) also ist auch $o = r$; $cb = cb$, und gemeinschaftlich: folglich $\triangle abc = \triangle bcd$.

Bew.

Bew. des 3) Es ist $a+c=180°$ (§. 22. 1.)
Wenn also $a=90$
ist auch $c=180-90=90$
Nun ist auch $c+d=180°$ (§. 22. 1.)
aber $c=90$
folglich auch $d=180-90=90$
D. i. alle vier a, b, c, d sind rechte Winkel.

Bew. des 4) $a+b=180°$ }
auch ist $b+d=180°$ } (§. 22. 1.)
$-b$ $a=d$

a) Wenn also ein Winkel a eines Parallellogrames gegeben ist: so weis man auch alle übrige. $d=a$; $b=180-a$, und $c=b$.

b) Das Trapez wird zwar auch durch die Diagonal in zwey Dreyecke, nicht aber deßwegen in zwey gleiche Dreyecke getheilt.

Anmerk. Ich finde für unnöthig, daß ich mich mit der Art, ein Viereck, oder Parallellogram zu machen, viel aufhalte. Es fließt dieses aus den bisherigen Sätzen, wenn sie einmal verstanden sind, von sich selbst. Wer sich aber in Verfertigung der geometrischen Figuren besonders üben will, kann sie aus J. Nik. Müllers Vorbereitung zur Geometrie lernen, welche Hr. Hofr. Kästner mit einer Vorrede begleitet hat, und denen vorzüglich empfiehlt, welche die Geometrie des Euklides studiren.

§. 28.

1) Die Winkel eines jedweden Vieleckes zusammengenommen sind $= 180° \times (n-2)$ wenn n die Zahl der Seiten bedeutet: D. i. Wenn die Winkel zusammen $= S$, so ist

$$S = 180 \times (n-2)$$

Bew. Jedes Vieleck kann durch Diagonallinien, die einander nicht durchkreuzen, in so viele Dreyecke getheilt werden, als die Zahl der Seiten weniger zwey: oder n — 2 ist. (Tab. II. Fig. X. und XI.) Die Winkel eines jeden Dreyeckes zusammen haben 180°: folglich ist in einem jeden Vielecke $S = 180° \times (n - 2)$.

a) In einem ordentlichen Vielecke sind Seiten und Winkel einander gleich: folglich ein jeder Vieleckswinkel

$$a = \frac{180 \times (n - 2)}{n}.$$

(Tab. II. Fig. X.) Gesetzt es wären 5 Seiten; so wäre $s = 180 \times 3 = 540$. Ein Vieleckswinkel z. B. a aber wäre $= \frac{180 \times 3}{5} = 108$.

b) Die Polygonswinkel unordentlicher Vielecke müssen besonders gesucht werden.

§. 29.

1) Der Winkel, welchen zwo gerade Linien innerhalb einer Zirkelperipherie machen, heißt der Winkel im Mittelpunkte (angulus ad centrum), wenn sich dessen Spitze c in dem Mittelpunkte befindet, und die Schenkel cb, cd an die Peripherie hingehen (Tab. II. Fig. XII.)

2) Der aber dessen Spitze selbst an der Peripherie in x oder y ist, und die Schenkel in den hohlen Zirkel hineingehen, oder auch an die Peripherie stossen, ein Peripherialwinkel (angulus ad Peripheriam).

3) Der Winkel am Mittelpunkte hat für sein Maaß den Bogen, welchen seine Schenkel abschneiden. (§. 8. 3.)

§. 30.

Der Winkel an der Peripherie ist allemal die Hälfte des Winkels am Mittelpunkte, der mit ihm einen gleichen Bogen abschneidet: es mag der an der Peripherie x, y (Tab. II. Fig. XII.) oder z seyn (Fig. XIV.) welche drey besondere Fälle möglich sind.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x \\ 2)\ y \\ 3)\ z \end{array}\right\} = \frac{c}{2}$$

Bew. des 1) Wenn wir x c e ziehen, so ist $c = m + n$; $x = r + s$.

Nun ist $\left.\begin{array}{l} m = r + b = 2r \\ n = s + d = 2s \end{array}\right\}$ (§. 24. u. 14. d.)

nach I. Th. (§. 23. e.) $m + n = 2r + 2s$

: 2 $\quad \frac{m+n}{2} = r + s$

folgl. subst. $\quad x = \frac{c}{2}$

Bew. des 2) $m + n = 2y$ (§. 24. und 14. d.)

: 2 $\quad \frac{m+n}{2} = y$

aber $\quad m + n = c$

folglich $\quad y = \frac{c}{2}$

Bew. des 3) $\left.\begin{array}{l} m = 2r \\ n = 2s \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\text{nach II. Bew.} \\ \text{nach I. Bew.}\end{array}$

folglich $\quad m + n = 2r + 2s$

$$\frac{m+n}{2} = r+s$$

subst. $z = \frac{c}{2}$

a) Das Maaß des Peripherialwinkels ist also jederzeit der halbe Bogen, auf dem er steht; und alle Winkel an der Peripherie, welche auf gleichen oder eben denselben Zirkelbögen stehen, sind gleich.

b) Wenn sie alle auf dem Diameter d. i. einem halben Zirkelbogen stehen, sind sie lauter rechte Winkel (Tab. II. Fig. XIII.) $a = \frac{de}{2} = 90° = R.$ So auch $b = R$, $c = R$ 2c.

c) Der Winkel K, den eine Tangente K T (Tab. II. Fig. XV.) mit der Sehne K m macht, ist ein Winkel an der Peripherie, der mit einem Schenkel K T, die Peripherie in eben demselben Punkte, wo er sie berührt, verläßt: der abgeschnittene Bogen ist also selbst K m n, welchen die Sehne unterspannt. Folglich $K = \frac{Kmn}{2}$.

d) Im Zirkel muß also die Tangente bey dem Berührungspunkte auf den Diameter K e c senkrecht stehen: sonst würde sie die Peripherie entweder vor- oder rückwärts durchschneiden; also keine Tangente seyn.

§. 31.

Das Maaß des Winkels a, der erst außerhalb der Peripherie gestaltet wird (Tab. II. Fig. XVI.), ist

ist die halbe Differenz der Zirkelbögen, welche seine verlängerten Schenkel überall abschneiden, oder

$$a = \frac{be - or}{2}.$$

Bew. Man ziehe o d mit a e gleichlaufend: so ist der Winkel y, den nämlich b o, d o machen = a, als der äußere dem innern zwischen den Parallelen o d, a e. D. i.

$$y = a$$

aber $$y = \frac{bd}{2}$$

also auch $$a = \frac{bd}{2}$$

(§. 22. c.) $$\frac{bd}{2} = \frac{be - de}{2} = \frac{be - or}{2}.$$

folglich $$a = \frac{be - or}{2}.$$

a) Eben so kann man beweisen, daß das Maaß eines Winkels, der sich innerhalb dem Zirkel, aber nicht am Mittelpunkte befindet, die halbe Summe der zween Bögen ist, dessen nämlich, worauf er stehet, und dessen, an welchen seine zurückgeführten Schenkel stossen. Oder $w = \frac{be + or}{2}$ (Tab. II. Fig. XVII.). Wenn mit o e, r b die gleichlaufenden f d, m n gezogen werden: so ist der Winkel

$$w = x = c$$

$$c = md = \frac{md + fn}{2}.$$

Wenn

Wenn man nun $bm + de$ zu md setzt, und die eben so große Bögen (§. 22. c.) $fo + nr$ von fn abziehet, so wird die Größe nicht verändert: also bleibt

$$\frac{md+fn}{2} = \frac{be+or}{2}.$$

folglich $$w = \frac{be+or}{2}.$$

b) Der Winkel t, welchen die Sekante tq mit der Tangente tT macht, ist nach diesem Paragraphe = der halben Differenz der Bögen Kq und $rK = \frac{Kq - rK}{2}$: weil er ein Winkel außer der Peripherie ist. (Fig. XV.)

§. 32.

Jede aus dem Mittelpunkte c eines Zirkels auf eine Sehne ad (Tab. III. Fig. I.) senkrechte Linie theilet die Sehne ad in zween gleiche Theile.

Bew. Man ziehe die Stralen ac, dc: so ist △ acd gleichschenklicht. ac, dc sind die Schenkel, ad die Grundlinie: folglich ce ein aus der Spitze c auf die Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyeckes gezogene senkrechte: es theilet aber diese (§. 18. c.) die Grundlinie des gleichschenklichten Dreyeckes, folglich hier die Sehne ad in zween gleiche Theile.

a) Da nun $ae = ed$; $ac = cd$; $ec = ec$: so ist der Winkel $acb = bcd$. Gleiche Winkel haben gleiches Maaß: also ist auch der Bogen $ab =$

b d: D. i. Von eben dieser Perpendikulär c e b wird auch der Bogen, welchen die Sehne bestimmt, in zween gleiche Theile getheilt.

b) Weil auf dem Punkte e der Linie a d keine andere Perpendikulär möglich ist, als b e c: so muß auch die aus e in den Zirkel hineingemachte senkrechte, in den Mittelpunkt c des Zirkels fallen.

c) Die Bögen zwischen parallelen Sehnen sind gleich: oder a l = d K. Denn wenn l K mit a b gleichläuft: so ist e c auch auf l K senkrecht. Also der

Bogen	b l = b K
und	b a = b d
(I. Th. §. 23. b.)	b l − b a = b K − b d
aber	b l − b a = a l
	b K − b d = d K
folglich	a l = d K

d) Weil im △ l c K, l c + c K = m n, und l c + c K > l K (§. 13.) so ist auch m n > l K. Eben so ist m n > a d, und also bewiesen, daß der Diameter die größte Sehne des Zirkels sey.

e) Gleiche Sehnen schneiden gleiche Bögen ab: weil sie gleichen Winkeln entgegengesetzt sind; gleiche Winkel aber gleiches Maaß haben. (Tab. III. Fig. I.)

§. 33.

Aufg. 1) Durch drey gegebene Punkte a, b, e (Tab. III. Fig. II.) die nicht in einer geraden Linie liegen,

2)

2) In einem Dreyeck a, b, e (Tab. III. Fig. III.) einen Zirkel beschreiben.

Aufl. des 1). Man ziehet die Linien a b, b e und sieht sie als Sehnen des Zirkels an, den man machen will; fällt dann auf jede eine Perpendikulär, indem man aus a und b die Zirkelschnitte in x, y; aus b und e in o, u macht. Wo sich diese Perpendikulären schneiden, ist der Mittelpunkt c des Zirkels, der, wenn er mit der Oefnung a c gemacht wird, durch die drey Punkte a b c gehet.

Aufl. des 2ten. Man theilet die Winkel a und e in zween gleiche Theile. (§. 17.) Der Punkt c, wo die Linien a c, e c zusammenstoßen, ist der Mittelpunkt des Zirkels o m n o. Dieses zu zeigen, ziehe man c m, c n, c o: so sind die Dreyecke e c o, e c n ähnlich und gleich: weil die zween Winkel bey c gleiche Theile von e; die bey o und n zween rechte sind, und e c gemeinschaftlich ist. Eben so ist △ a c m = △ a c o: folglich sind c m, c n, c o gleiche Stralen, und o m n o ein Zirkel.

a) Nach dem Verfahren der ersten Auflösung kann man auch einen Zirkel machen, der durch die 3 Spitze eines jeden Dreyeckes gehet, wenn man zwo Seiten des Dreyeckes als Sehnen davon ansieht. Man kann den Mittelpunkt eines Zirkels finden, wenn man nur aus einem Punkte der Peripherie zwo Sehnen ziehet, und dann eben so in x, y, o, u die Zirkeldurchschnitte macht, u. s. w. Man kann auf jede reguläre Figur einen Zirkel beschreiben.

b)

b) Nach dem Verfahren der 2ten Auflösung läßt sich nicht nur in jedes Dreyeck, sondern in eine jede reguläre Figur ein Zirkel beschreiben, welcher die Seiten der Figur berührt.

c) Ist die Zahl der Seiten gleich, und ziehet man von einem Winkel a auf seinen entgegengesetzten m, dann auch so von b auf n (Tab. III. Fig. IV.) gerade Linien: so werden sie Durchmesser und ihr Durchschnittspunkt c der Mittelpunkt des Zirkels seyn, der um die Figur beschrieben werden kann.

§. 34.

1) In einer ordentlichen Figur oder Vielecke ist der Winkel am Mittelpunkte oder der Zentralwinkel $c = \frac{360}{n}$, wo n die Zahl der Seiten bedeutet. Denn alle Winkel im Mittelpunkte herum sind $= 360$: einer muß also, und folglich auch der Zentralwinkel $= \frac{360}{n}$ seyn.

2) Der Vieleckswinkel $= 180 - \frac{360}{n}$

Bew. Wenn man (Tab. III. Fig. IV.) wirklich die Durchmesser a m, b n, d e zieht: so erhält man so viele Dreyecke als Seiten die Figur hat. Nur zween äußere Winkel o + s geben einen Polygonswinkel: es ist aber $o + s = o + r$; denn $\triangle\, a\, b\, c = \triangle\, b\, c\, e$, weil beyderseits die drey Seiten einander gleich sind: nun ist

$o + r = 180 - c$: also auch $o + s = 180 - c$ in einem Dreyecke: in allen Dreyecken zusammen, wenn die Zahl der Seiten $= n$

$$(o + r) \times n = 180\,n - c\,n.$$

Also auch $$(o + s) \times n = 180\,n - c\,n$$

Alle Winkel im Mittelpunkte machen $360°$ oder $c\,n = 360°$:

folglich auch $$(o + s) \times n = 180\,n - 360$$

$: n$ $$o + s = 180 - \frac{360}{n}$$

a) Man kann 1) daher aus dem gegebenen Strale a c, oder 2) aus der Seite a b in einen Zirkel eine reguläre Figur z. B. ein Fünfeck beschreiben.

Im ersten Falle sucht man den Zentralwinkel $= \frac{360}{5} = 72$. Sezt unter diesem Winkel an den ersten Stral a c noch einen solchen c b; beschreibt dann mit eben diesem Strale einen Zirkel, und trägt darauf a b so lange herum, als es angeht.

Im 2ten sucht man den Vieleckwinkel $= 180 - \frac{360}{5} = 108$; halbirt ihn, und sezt unter diesem Winkel $= \frac{108}{2} = 54$, a c und unter eben diesen auch b c an die Seite a b: der Punkt c, bey welchem sie zusammentreffen, ist der Mittelpunkt des Fünfeckes, oder des Zirkels a b m ꝛc. auf dessen Peripherie a b wieder so oft herumgetragen wird, als es möglich ist.

b) Der Radius läßt sich auf jeder Peripherie gerade sechsmal herumtragen. Denn wenn die Sehne dem Radius gleich ist: ist $\triangle$ a b c gleichseitig, und der Winkel am Mittelpunkte $= 60$: es ist aber $\frac{360}{60} = 6$.

c)

c) Es ist $\frac{180 \times (n - 2)}{n} = \frac{180\,n}{n} - \frac{360}{n} =$

$180 - \frac{360}{n}$. D. i. Die Bestimmung ist einerley, man mag auch in dem regulären Vielecke nach dieser, oder nach der Art des §. 27. verfahren.

Anmerk. Wenn man 360 mit 3 theilet: so hat man den Winkel im Mittelpunkte eines Zirkels für ein gleichseitiges Dreyeck: Zieht man dann die Sehnen; so ist die Aufgabe, ein gleichseitiges Dreyeck in den Zirkel zu beschreiben, aufgelöst, für dessen Erfindung Thales von Milet (§. 5. Anmerk.) dem Jupiter einen Ochsen geschlachtet hat. Auch läßt sich dieß nach §. 32. verrichten.

IV. Abschnitt.

Von den Figuren in Rücksicht auf ihren Innhalt.

§. 35.

Zwey Parallelograme a b c d, c e d f (Tab. III. Fig. V.) von einerley Höhe a c und Grundlinie c d sind gleich

a b c d = e b d f.

Bew. Man ziehe die Linie c e: so entstehen zwey Dreyecke a b e und c d f, in welchen die Winkel

m = n, o = s (§. 22. 2.)

u. die Seiten a b = c d (§. 22. b.) folgl.

ist

ist $\triangle abe = \triangle cdf$

beyderf. $+y-x$ $\triangle abe + y - x = \triangle cdf + y - x$

$$abe + y - x = abcd$$

$$cdf + y - x = cdef$$

folglich $abcd = cdef.$

a) Es ist also das Parallellogram (Tab. II. Fig. VIII.) $acbd = aebf$.

b) Dreyecke sind Hälften recht = oder schiefwinklichter Parallellogarme, wie (Tab. II. Fig. VI., VII. und VIII.) zeigen. Es sind also auch die Dreyecke gleicher Grundlinien und Höhen einander gleich.

c) Haben zwey Dreyecke eine gemeinschaftliche Spize, oder befinden sie sich zwischen zwoen Parallelen af, mn (Tab. III. Fig. VI.) so daß die Grundlinie auf einer der Parallelen liege, die Spitze aber an die andere stoße: so haben sie gleiche Höhe, (§. 22. b.). Es sind also Dreyecke gleicher Grundlinien einander gleich, wenn sie eine gemeinschaftliche Spitze haben, oder zwischen zwoen Parallelen sind. So ist $\triangle acb = \triangle cef = \triangle adb = \triangle edf$.

§. 36.

Der Innhalt eines Parallellogrames gleichet der Grundlinie in die Höhe multiplizirt: oder wechselweise. D. i. (Tab. II. Fig. VII.)

$$abcd = cd \times ac.$$

Bew. Wenn sich die Grundlinie von c bis a immer gleichlaufend bewegte, und immerzu Merkmaale

zu=

zurückließe: so würde die Menge der zurückgelassenen Merkmaale das ganze Parallellogram ausmachen: sie würde aber so viele Merkmaale zurücklassen, als Punkte auf der Höhe sind. Das Produkt der Grundlinie in alle Punkte oder Theile der Höhe muß also den ganzen Innhalt des Parallellogrames geben.

Anmerk. Schenmark beweiset diesen, wie auch den vorhergehenden Satz im 4ten Kap. seiner anal. Geometrie aus der Fluxionenrechnung. Wenn nämlich die Grundlinie des Parallellogrames beständig und = b, das Differential der Höhe = dx: so ist b dx das Differential des Parallellogrames, dessen Integral (I. Th. §. 167. III.) wiederum = bx oder das Produkt aus der Höhe in die Grundlinie ist.

a) Sind die Höhe und Grundlinie eines Parallellogrames einander gleich, wie in einem vollkommenen Vierecke (Tab. II. Fig. VI.) so ist $ac \times cd = ac^2$. D. i. den Innhalt eines vollkommenen Viereckes giebt das Quadrat einer Seite.

b) Nach §. 35. ist das Parallellogram aebf = acbd (Tab. II. Fig. VIII.) folglich mit diesem auch von gleichem Innhalt. Man erhält also die Fläche eines schiefen Parallellogrames, oder einer Raute aebf, wenn man aus a auf cf eine Perpendikulär macht, dann ef mit der Perpendikulär ac, d. i. die Höhe mit der Grundlinie multiplizirt.

c) Das rechtwinklichte Dreyeck ist die Hälfte eines Rechteckes (Tab. II. Eig. VI. und VII.) Seine Fläche muß also $\frac{ac \times cd}{2}$ D. i. das halbe Produkt aus der Höhe in die Grundlinie; oder die halbe Höhe in

die

die Grundlinie; oder auch die Höhe in die halbe Grundlinie seyn.

d) Ein schiefwinklichtes Dreyeck ist die Hälfte einer Raute; denn an sich selbst gesetzt wird es eine Raute ausmachen: man muß also aus einem Winkel auf die entgegengesetzte Seite, die man als die Grundlinie annimmt, eine Perpendikulär ziehen. Das halbe Produkt aus dieser in die Grundlinie giebt die Fläche des Dreyeckes, es mag die Perpendikulär inn- oder außerhalb die Figur fallen. So ist die Fläche des △ abd (Tab. II. Fig. XVIII.) $= \frac{ae \times bd}{2}$; des △ abc (Tab. I. Fig. XII.) $= \frac{ae \times bc}{2}$ rc.

Anmerk. Hier läßt sich von der im I. Th. §. 161. angeführten Aufgabe nützlicher Gebrauch machen. Gesetzt eine Linie solle so in zween Theile getheilt werden, daß das daraus entstehende Rechteck ein Maximum gäbe: so zeigt sich durch die dortige Auflösung, daß die Theile gleich, und die Figur ein rechtwinklichtes Dreyeck werden müße. Wenn ein Theil $= x$: so ist der andere $= a - x$: also das Rechteck $= ax - x^2 =$ Max. Nach gehöriger Differentirung wird $adx - 2xdx = 0$, und endlich $x = \frac{a}{2}$. Es ist diese Figur für die Grundfläche eines Gebäudes, vorzüglich eines Hauses, das man auf freyem Felde aufbauen will, besonders vortheilhaft. Denn da sie dem Gebäude unter gleichem Raume die kleinste Oberfläche verschaft, die möglich ist: so werden dadurch nicht nur die Baukösten um ein Merkliches vermindert, sondern das Gebäude selbst wird von der Witterung weniger zu leiden haben, als jedes andere von einem eben so großen Raume.

§. 37.

§. 37.

In einem rechtwinklichten Dreyecke ist das Quadrat der Hypothenuse den Quadraten der zwo Seiten zusammengenommen gleich. Oder (Tab. III. Fig. VII.)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Bew. Wenn man aus AC, AB, BC Quadrate macht, dann Be mit Af gleichlaufend ziehet: so ist

$$rCeg = BCcd = BC^2$$

Denn, wenn man die Linie Bg, und Ac zieht: so ist

$$\triangle BCg = \triangle ACc \quad (\S.\ 14.\ a.)$$

weil $AC = Cg$

$BC = Cc$

die Winkel $m + o = n + o$, weil m u. n rechte sind, und $o = o$.

Nun ist $\triangle BCg = rCg = \frac{1}{2} rCge$ } §. 35. c.

$\triangle ACc = BCc = \frac{1}{2} BCcd$ }

Folglich $\frac{1}{2} rCge = \frac{1}{2} BCcd$

×2 $rCge = BCcd = BC^2$

Auf eben diese Art kann man auch beweisen, daß $Arfe = ABab = AB^2$, wenn man von a auf C, und von B auf f Diagonalen ziehet. Es ist daher

$Arfe = AB^2$

$rCeg = BC^2$

also $Arfe + rCeg = AB^2 + BC^2$

aber $Arfe + rCeg = AC^2$

folglich $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Anmerk. Dieser Lehrsatz ist der Grund der ganzen Mathematik, sowohl der reinen und höhern, als auch der angewandten. Pythagoras soll daher den Göttern für diese Erfindung eine Hekatombe, oder ein Opfer von 100 Ochsen geschlachtet haben. Uebrigens giebt es 24 verschiedene Beweise des pythagorischen Lehrsatzes, wovon Herr Professor Ries zu Tübingen den letzten aus der Differentialrechnung geliefert hat. Der hier gegebene ist des Euklides seiner. (Lib. I. Prop. 47.) Ich werde doch unten auch den aus der Aehnlichkeit der Dreyecke noch anführen.

a) Weil $AC^2 = AB^2 + BC^2$,

so ist I. $AC = \sqrt{(AB^2 + BC^2)}$

II. $AB = \sqrt{(AC^2 - BC^2)}$

III. $BC = \sqrt{(AC^2 - AB^2)}$

b) Wenn $AB = BC$: so ist $AC^2 = 2AB^2 = 2BC^2$; $AB^2 = \frac{1}{2}AC^2$, so auch $BC^2 = \frac{1}{2}AC^2$. $AC = \sqrt{2AB^2}$; $AB = \sqrt{\frac{1}{2}AC^2}$.

Anmerk. Für ein Beyspiel über die Ausübung des pythagorischen Lehrsatzes will ich eine Aufgabe aus der Differentialrechnung entlehnen.

§. 38.

Aufg. Man soll auf einem halben Zirkel das größte Dreyeck beschreiben.

Aufl. Es sey der Durchmesser de eines Zirkels (Tab. II. Fig. XIII.) $= a$; eine Seite $ec = x$, so ist die andere $dc = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; weil das $\triangle edc$ rechtwinklicht ist (§. 37. a. II.). Der Innhalt des Dreyeckes ist $= \frac{1}{2} ec \times cd = \frac{1}{2} x \sqrt{(a^2 - x^2)}$ folglich nach I. Th. §. 160.

$$\frac{1}{2} x \sqrt{(a^2 - x^2)} = \text{Max.}$$

Wenn

Wenn dieses nach I. Th. §. 155. und 157. differentirt wird: so ist

$$\tfrac{1}{2}dx\sqrt{(a^2-x^2)}+\tfrac{1}{2}x\frac{-x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=0$$

unter einerley Benennung (I. Th. §. 55. b.)

$$\frac{\tfrac{1}{2}dx(a^2-x^2)-x^2\,dx}{2\sqrt{(a^2-x^2)}}=0$$

D. i. $\dfrac{a^2\,dx-2x^2\,dx}{2\sqrt{(a^2-x^2)}}=0$

$\times 2\sqrt{(a^2-x^2)}$ $\quad a^2\,dx-2x^2\,dx=2\sqrt{(a^2-x^2)}\times 0=0$

$+2x^2\,dx$ $\quad a^2\,dx=2x^2\,dx$

$:dx$ $\quad a^2=2x^2$

$:2$ $\quad \dfrac{a^2}{2}=x^2$

Wird nun dieß in der Gleichung $ed=\sqrt{(a^2-x^2)}$ für x^2 substituirt: so entstehet $ed=\sqrt{(a^2-\frac{a^2}{2})}=\sqrt{\frac{a^2}{2}}$. Es ist aber in diesem Falle das rechtwinklichte Dreyeck gleichschenklicht (§. 37. b.) Das gleichschenklichte Dreyeck ist also das größte, das auf einem halben Zirkel gemacht werden kann.

a) Zwey solche Dreyecke geben ein rechtwinklichtes Viereck, welches in den ganzen Zirkel a b c d hineinbeschrieben ist: es ist also wieder das rechtwinklichte Viereck aus allen vierseitigen Figuren, die in einen Zirkel beschrieben werden können, die größte.

§. 39.

Die Fläche eines ordentlichen Vieleckes giebt das halbe Produkt aus der Höhe c h in die Summe seiner Seite. (Tab. III. Fig. IV.).

Bew. Das Vieleck bestehet gleichsam aus so vielen gleichen Dreyecken von einer und eben derselben Höhe, als es Seiten hat: die Flächen aller dieser Dreyecke zusammen machen also den Innhalt des ganzen Vieleckes aus. Da nun das halbe Produkt der Höhe c h in eine Seite, den Innhalt eines Dreyeckes giebt: so muß das halbe Produkt dieser Höhe in alle Seiten den Innhalt des Vieleckes geben.

a) Es kann also ein ordentliches Vieleck als ein einziges Dreyeck angesehen werden, dessen Höhe c h, die Grundlinie aber die Summe aller Seiten ist.

b) Das unordentliche Vieleck wird durch Diagonalen (§. 27.) in lauter Dreyecke eingetheilt; der Innhalt eines jeden Dreyeckes nach §. 35. b und c gesucht. Die Summe aller Dreyecke ist der Flächeninnhalt des ganzen Vieleckes.

c) Auch das ordentliche kann also berechnet werden. (Tab. II. Fig. X.)

§. 40.

1) Jedes ordentliche Vieleck, das in einem Zirkel beschrieben ist, läßt sich verdoppeln, d. i. in eines verwandeln, welches noch so viele Seiten hat. Wenn

a d die Seite eines Sechseckes ist (Tab. III. Fig. I.) so ist, wenn man den Bogen a b d halbirt, a b die Seite, welche das Sechseck in ein Zwölfeck verwandelt. Weil nun △ a e b rechtwinklicht ist: so ist $ab^2 = ae^2 + eb^2$, und $ab = \sqrt{(ae^2 + eb^2)}$ oder weil $ae = \frac{1}{2}ad$, $ab = \sqrt{(\frac{1}{4}ad^2 + eb^2)}$. a b ist also die Seite, welche das Vieleck verdoppelt. So läßt sich wieder eine Seite finden, die das Vieleck nochmal verdoppelt, oder in ein neues verwandelt, das viermal so viel Seiten hat, als das erste 2c.

2) Gleichwie der Bogen a b d größer ist als die Sehne a d: so sind auch die zwo Sehnen $ab + bd > ad$. Es nähern sich also a b + b d dem Bogen mehr als a d. Auf eben die Art werden sich noch kleinere Sehnen dem Bogen noch mehr nähern.

3) Man kann also durch fortgesetzte Halbirungen der Winkel so weit kommen, daß der Unterschied zwischen der Sehne und ihren Bogen kleiner werde, als jede angebliche Größe. D. i. die Sehne wird enlich selbst in den Bogen, nnd das Vieleck in einen Zirkel verwandelt werden.

a) Es ist erlaubt den unendlichkleinen Bogen, als eine eben so kleine Sehne anzunehmen, und wechselweise.

b) Der Zirkel kann als ein Vieleck betrachtet werden, das aus unendlichvielen, und eben so kleinen Seiten bestehet, welche Seiten Grundlinien unendlichkleiner Dreyecke sind, die alle den Radius des Zirkels für ihre Höhe haben.

Anmerk. Auf diese Weise hat man die Quadratur des Zirkels, und das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie gefunden. Z. B. Es sey in einem ordentlichen Sechsecke $a\,d = 1$, so ist $a\,e = \frac{1}{2} = 0,5$. $c\,e = \sqrt{}(a\,c^2 - a\,e^2) = \sqrt{}(1 - 0,25) = \sqrt{}0,75$, wenn man wirklich $\sqrt{}$ ausziehet $= 0,8660$. Zieht man dieß vom Strale $b\,c$, den man $= 1$ setzt, ab, so erhält man $b\,e$, aus diesem läßt sich nun endlich $\sqrt{}(a\,e^2 + e\,b^2)$ d. i. die Seite für das Zwölfeck finden. So kam man mit ungemeiner Mühe, durch beständige Quadratwurzeln aus Quadratwurzeln auf ein Verhältniß, das nach dem Archimedes 7 : 22; nach dem Adrianus Metius 113 : 355; nach Ludolph von Kölln 100 : 314 ist. Bequemere Methoden verschaft uns die Rechnung des Unendlichen. Ich will hier auf diese Art das ludolphische Verhältniß in fünf Ziffern suchen. Es ist dieses eben so schwer nicht, als man glauben könnte: zugleich aber wird es uns von dem Werthe und Nutzen jener erhabenen Rechnung mehr überzeugen, und zu einer Uebung in derselben dienlich seyn.

§. 41.

Der Durchmesser verhält sich zur Peripherie, gleichwie 10000 : 31415.

Bew. Nach der Lehre des I. Th. §. 153. **Anmerk.** ist $M\,m$ das Differential des Zirkelbogens $a\,M$ (Tab. III. Fig. VIII.). Wird nun der gefundene Werth von $M\,m$ integrirt: so bekömmt man die Länge des Bogens $a\,M$.

Weil $\triangle\ M\,R\,m$ rechtwinklicht ist: so ist $M\,m^2 = M\,R^2 + R\,m^2 = d\,x^2 + d\,y^2$, und $M\,m = \sqrt{}(d\,x^2 + d\,y^2)$.

Um $\sqrt{}(d\,x^2 + d\,y^2)$ hier zu finden, ist im Zirkel $y^2 = a\,x - x^2$ (I. Th. §. 160.), und weil der

Dia=

Diameter beständig: also = 1 gesetzt werden kann, auch $y^2 = x - x^2$: folglich

diff. $2y\,dy = dx - 2x\,dx$

$:2y$ $dy = \frac{dx - 2x\,dx}{2y}$

quadr. $dy^2 = \frac{dx^2 - 4x\,dx^2 + 4x^2\,dx^2}{4y^2}$

für y^2 subst. $dy^2 = \frac{dx^2 - 4x\,dx^2 + 4x^2\,dx^2}{4(x - x^2)}$

$= \frac{dx^2 - dx^2 \times (4x - 4x^2)}{4x - 4x^2} = \frac{dx^2}{4x - 4x^2} - dx^2.$

$+dx^2.$ $dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2}{4x - 4x^2}$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx}{2\sqrt{(x - x^2)}} = \frac{1}{2}dx(x - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Damit aber dieß integrirt werden könne, muß vorher $(x - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ in eine unendliche Reihe verwandelt werden. Dann wird

$$(x - x^2)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}x^2 + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}x^4 + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}x^{-\frac{7}{2}}x^6 + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}x^{-\frac{9}{2}}x^8 - -)$$

$$\frac{1}{2}dx(x - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}dx + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}}dx + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}}dx + \frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}}.$$

Integr. $S(\frac{1}{2}dx(x - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{12}x^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{80}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}}.$

also

also $aM = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}}$

$= x^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4 \text{ --})$

Setzt man nun $aM = \frac{1}{6}$ der Peripherie P, so ist $x = Pc = \frac{ac}{2} = \frac{1}{4}d$ (Tab. III. Fig. IX.), oder $\frac{1}{4}$ des Durchmessers. Denn weil das Dreyeck a M c gleichseitig ist (§. 34. b.): so wird der Stral von der aus M auf a c gezogenen Ordinate $y = PM$ in zween gleiche Theile getheilt (§. 18. c.) und $x = aP = \frac{ac}{2} = \frac{1}{4}d$ seyn: folglich

$$\frac{1}{6}P = \frac{1}{2}(d + \frac{1}{6}\cdot\frac{d}{4} + \frac{3}{40}\cdot\frac{d}{16} + \frac{5}{112}\cdot\frac{d}{64} + \frac{35}{1152}\cdot\frac{d}{256}$$

$$\times 6 \quad P = 3\,(d + \frac{d}{24} + \frac{3d}{640} + \frac{5d}{7168} + \frac{35d}{293912} \text{ --})$$

Wird nun der Durchmesser $d = \frac{1000000}{1000000}$ gemacht; so ist das

1te Gl.	$= 3 \cdot d$	$= 3000000$
2te	$= \frac{3\cdot d}{24}$	$= 125000$
3te	$= \frac{3\cdot 3d}{640}$	$= 14062$
4te	$= \frac{3\cdot 5d}{7168}$	$= 2092$
5te	$= \frac{3\cdot 35d}{293912}$	$= 356$
	$P =$	3141550

Folg=

Folglich, wenn man die erste fünf Zahlzeichen behält, das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie

10000 : 31415.

Man braucht dieß Verhältniß in großen Zirkeln, wo es auch auf Zehentausendtheile ankömmt. In kleinern nimmt man nur die ersten 4, oder insgemein nur gar die ersten 3 Zahlzeichen.

Anmerk. Wollte man das Verhältniß noch genauer haben: so müßte die Reihe weiter fortgesetzt, und der Durchmesser in noch mehrere Theile getheilt werden. Auf diese Art fand Ludolph, daß, wenn der Durchmesser = 1, der Umfang größer sey, als 3, 14159265358979323846264338327950 aber kleiner, als diese Zahl, wenn nur 0 in 1 verwandelt wird. Das Verhältniß ist also in allen Dezimalstellen richtig bis auf die letzte. Es haben zwar einige noch weiter fortgerechnet: z. B. Herr Euler *de variis modis Quadraturam Circuli proxime exprimendi* giebt den Umkreis mit 127 Dezimalstellen an, die in Kästners Anal. des Unendl. §. 308. zu finden sind: aber bis zur völligen geometrischen Schärfe wird sie wohl nie gebracht werden; weil es dem Vermuthen nach irrational ist. Ich sage dem Vermuthen nach: denn obschon dieses Sturm *Mathes. enucl. L. I.* §. 2. *Prop.* 23. beweisen will: so ist doch dieser Beweis, wie Herr Hofr. Kästner und andere anmerken, noch vielen Schwierigkeiten unterworfen. Es ist aber auch eine genauere Bestimmung dießfalls ganz unnöthig, indem man weder im gemeinen Leben, noch in der angewandten Mathematik das ludolphische Verhältniß jemal ganz braucht. Doch giebt es immer solche vermeynte Adepten, welche die Quadratur des Zirkels aufsuchen, oder gar schon gefunden haben wollen. Im *Mercure de France* 1762. wird von einem gemeldet, welcher nach einem 25jährigen Fleiße ein Verhältniß wie 1 : 3, 1419 herausgebracht: allein wie Herr Kästner sagt: weil sich diese beyde Dinge nicht so verhalten können: so hat der Mann seine 25 Jahre sehr übel zugebracht. Vor etwelchen Jahren hat sich ein polnischer Offizier sogar an den

Reichs-

Reichstag gewandt. Auch für diesen fiel das Urtheil der Göttinger gelehrten Anzeigen sehr unglücklich aus. Mehr dergleichen sind in Krafts *Dissert. de Quadratura Circuli praesertim Merkeliana*, und dessen *Geom. sublim. Sect. III. de Circulo Montucla Histoire des Recherches sur la Quadratur du Cercle Paris* 1754 angeführt. Die königliche Akademie zu Paris erklärte daher öffentlich, daß sie von dieser Materie keine Schrift mehr annehmen wollte.

Da sich das ludolphische Verhältniß in allen Arten der Näherung vollkommen erhält: so kann man jede andere damit vergleichen, indem man das Glied, welches die Peripherie ausdrückt, durch das, welches den Diameter bedeutet, eine Weile forttheilet, und dann sieht, bey der wievielten Dezimalziffer es von dem ludolphischen abweicht. Bey einer solchen Vergleichung wird $\frac{22}{7} = 1 : 3, 142$, d. i. es zeigt sich, daß das archimedische Verhältniß schon in der 3ten Dezimalstelle zu viel gebe. Des Metius seines, oder $\frac{355}{113}$ giebt 1 : 3, 1415929, und ist also bis auf die 7te Dezimalstelle richtig. So sind wir berechtiget alle andere dagegen zu prüfen. S. Hrn. Hofr. Kästners Anfangsgr. der Geom. 44. Satz. 3. Anmerk., und Hrn. Prof. Klemms mathem. Lehrb. §. 573.

§. 42.

Die Zirkelfläche Q (area circuli) gleichet dem halben Produkte aus der Peripherie P in den Stral R. D. i. $Q = \frac{RP}{2}$, wenn man den Diameter D in die Rechnung nimmt: $Q = \frac{PD}{4}$.

Bew. Die Zirkelfläche gleichet einem regulären unendlichseitigen Polygon, in welchem die Summe aller Seiten selbst die Zirkelperipherie; die Höhe einer Seite aber

der

der Radius ist. (§. 40. b.) Es giebt aber das halbe Produkt der Höhe in die Summe aller Seiten den Innhalt eines regulären Polygons: (§. 39. a.) folglich auch das Produkt des halben Radius in die Peripherie den Innhalt des Zirkels, oder $Q = \frac{PR}{2} = \frac{PD}{4}$.

a) Darum ist ein Zirkel a e m c (Tab. III. Fig. X.) einem geradlinichten Dreyecke a b c gleich, dessen Höhe der Radius a c, die Grundlinie aber die Peripherie a e m = a b ist.

b) Der Innhalt eines halben Zirkels ist also gleich dem 4ten Theile des Radius mit der Peripherie multiplizirt $= \frac{RP}{4}$.

c) Eines jeden Ausschnittes a b c d (Tab. III. Fig. I.) $= \frac{R \times abd}{2}$ d. i. dem halben Radius in dem abgeschnittenen Bogen a b d multiplizirt.

d) Eines Abschnittes a b d e endlich = a b d c — a c d e. D. i. wenn man den Ausschnitt a b d c sucht, von selbem das Dreyeck a e d c abzieht: so ist der Rest offenbar der Innhalt des Abschnittes a b d e.

e) Auf eine ähnliche Weise findet man den Ring a b c, welchen zwo Zirkelperipherien M N O, m n o (Tab. III. Fig. XI.) einschließen, wenn man nämlich die Fläche des kleinern Zirkels von der Fläche des

grö-

größern abziehet, oder $abc = \frac{RP}{2} - \frac{rp}{2}$: wo die großen Buchstaben für den großen, die kleinen für den kleinen Zirkel gelten.

Anmerk. Auf die bey d) und e) angeführte Art läßt sich jedes andere Stück eines Zirkels finden. Z. B. der Raum, welchen zwo Selnen einschließen. ꝛc.

Bey der wirklichen Berechnung eines Zirkels oder Stückes davon muß der Bogen des Zirkels, welchen man dazu vonnöthen hat, im Längenmaaße gesucht werden. Die Peripherie, die ich $= 392, 56^\circ$ setze, wird nach dem Längenmaaße in Linien also gefunden.

$$100 : 314 = 392, 56^\circ : x.$$
$$x = \frac{314 \times 392, 56}{100} = 1232, 63'''$$

Hat man einmal den Zirkel im Längenmaaße: so erhält man einen jeden Bogen z. B. $= 40^\circ$, indem man setzt:

$$360^\circ : 1232, 63''' = 40^\circ : x$$
$$x = \frac{1232, 63 \times 40}{360} = 136, 95'''$$

Der Dezimalbruch 95 kann weggelassen werden: so wird der Bogen von $40^\circ = 136''' = 1' \, 3'' \, 6'''$.

§. 43.

Man beschreibe ein rechtwinklichtes Dreyeck abf, so daß $ab = bf$ werde, (Tab. III. Fig. XII.) und mache aus den Punkten c und e, welche af und ab in gleiche Theile theilen, die Zirkelbögen adb, amb: so wird man ein mondförmiges Stück ambd erhalten, das von seiner Gestalt und seinem Erfinder *Lunula Hypocratis* genannt wird.

Es ist die Fläche $ambd = \triangle acb$. D. i. ☾ $ambd = \triangle acb$. Bew.

Bew. Weil $ab^2 = \frac{1}{2} af^2$: so ist der Zirkel, von welchem adb ein Bogen ist, nochmal so groß, als der, wovon amb einer ist: der halbe kleinere Zirkel amba muß also dem 4ten Theile des größeren oder $adbc = \frac{adbnf}{2}$ gleich seyn: weil die Sehne ab = bf: folglich auch der Bogen adb = bnf. Also

$$amba = adbc$$

$$-adba \qquad \underline{amba - adba = adbc - adba}$$

$$amba - adba = ambd$$

$$\text{aber} \qquad \underline{ambc - adba = \triangle abc}$$

$$\text{folglich} \qquad ☾\, ambd = \triangle abc.$$

Anmerk. Weil die Zirkelfläche nur beynahe bekannt ist: so ist auch die Bestimmung für die Lunula Hypocratis nur beynahe wahr. Es erhellet daraus, wie vergeblich die Bemühung desjenigen seyn würde, der aus dieser selbst die Quadratur des Zirkels suchen wollte.

Daß unter allen Figuren vom gleichen Umfange der Zirkel die größte Fläche sey, und daß auch die Flächen regulärer Figuren größer seyen, als irregulärer; die von mehrern Seiten wieder größer, als die Flächen von wenigern, läßt sich leicht aus §. 40. begreifen. Dido konnte daher unter keiner Figur mit den Riemen ihrer Ochsenhaut so viel Land einschliessen, als unter der zirkelförmigen.

Ueber die Lehre vom Kreise, wovon aber noch einiges vorkommen wird, siehe Hrn. Hofr. Kästners Anfgr. der Geom. und Klemms mathem. Lehrb.

Aus den bisherigen wird sich die Verwandlung der Figuren in folgenden Aufgaben vortragen lassen.

§. 44.

1. Aufg. Das Quadrat abcd (Tab. III. Fig. XIII.) in ein Rechteck verändern. Aufl.

Aufl. Man verlängere b d so lange, bis b e der Höhe des verlangten Rechteckes gleich wird, ziehe von e durch a eine gerade Linie, welcher die verlängerte d c in p begegnen wird. Macht man nun △ p m e = △ p d e: so wird o m n a = a b c d seyn.

Denn weil
$$\triangle pme = \triangle pde$$
$$\triangle X = \triangle Y$$
$$\triangle x = \triangle y$$

so ist I. Th. §. 23. e. $\triangle pme - X - x = \triangle pde - Y - y$

aber
$$\triangle pme - X - x = omna$$
$$\triangle pde - Y - y = abcd$$

folgl. auch
$$omna = abcd$$

a) Das Rechteck o m n a in das Viereck a b c d umzubilden, wird aus dem Innhalt von o m n a die Quadratwurzel gesucht, welche n e seyn wird. Hat man diese einmal: so verfährt man wie bey der Verwandlung von a b c d in o m n a.

b) Weil Parallelograme von gleichen Höhen und Grundlinien einander gleich sind: so kann man das Viereck a b c d (Tab. III. Fig. V.) in ein jedes schiefes Parallelogram, dessen eine schiefe Seite b e gegeben ist, verwandeln, wenn man nur dem Parallelograme b e d f mit a b c d einerley Höhe giebt. Wechselweise wird aus b e d f ein Rechteck, wenn auf die Grundlinie zwo mit b e d f gleichhohe Perpendikulären a b, c d gemacht, und mit einer geraden Linie a c verbunden werden.

c)

c) Alle Vierecke und Rechtecke lassen sich also in lange Rauten ꝛc. verwandeln, und umgekehrt.

d) Aus dem in a) angeführten Grunde kann auch aus dem △ a b c das △ e c f (Tab. III. Fig. VI.) und jedes andere werden, wenn es nur eben die Höhe und Grundlinie hat, wie △ a b c.

§. 45.

2te Aufg. Das Dreyeck a b c (Tab. III. Fig. XIV.) in ein Parallellogram verwandeln, dessen eine Seite c h seyn soll.

Aufl. Man halbire die Grundlinie b c; setze die gegebene c h an dieselbe. Aus e, h und c werden dann die gleichlaufenden e f, i h, g c gemacht. Wenn nun wieder aus i durch c die gerade i c K gezogen, und dann mit K L verbunden wird, welches f e zeiget: so ist

$$mchL = \triangle abc$$

denn $\triangle abc = \frac{abgc}{2}$ (§. 35. b.)

$$= efcg$$

Nun ist $\triangle Kfi = \triangle KLi$

also auch $\triangle Kfi - X - x = \triangle KLi - Y - y$

$$\triangle Kfi - X - x = efcg$$

$$\triangle KLi - Y - y = mchL$$

folgl. $efcg = mchL$

und weil $efcg = \triangle abc$

ist endl. $mchL = \triangle abc.$

a)

a) Ist ein Dreyeck einmal in ein schiefes Parallellogram verwandelt: so kann es nach dem vorhergehenden §. in ein rechtwinklichtes, und aus diesem nach Bedürfniß auch in ein Quadrat verwandelt werden.

§. 46.

3te Aufg. Zwey Quadrate A a b B, B d c C (Tab. III. Fig. VII.) in eines verwandeln.

Aufl. Man nehme von jeder eine Seite A B, B C; setze sie bey B unter einem rechten Winkel zusammen; mache dann die Hypothenus A C, und aus dieser das Quadrat A C f g. Es wird dieß nach §. 36. den obigen zweyen gleich seyn.

a) Sollen mehrere Quadrate z. B. ab^2, bc^2, cd^2, de^2 (Tab. III. Fig. XV.) zu einem gemacht werden, das allen zusammengenommen gleich ist: so ist $ac^2 = ab^2 + bc^2$. Wird nun c d senkrecht an a c gesetzt: so ist $ad^2 = ac^2 + cd^2 = ab^2 + cb^2 + cd^2$. Setzt man jetzt auch d e an a d: so ist $ac^2 = ad^2 + de^2 = ab^2 + bc^2 + cd^2 + de^2$.

b) Ein Quadrat a b c d (Tab. II. Fig. VI.) in ein nochmal so großes zu verwandeln, darf nur die Diagonal b c gezogen, und daraus ein Quadrat gemacht werden: so ist $bc^2 = 2\,ab^2$. (§. 37. b.)

c) Im Gegentheile ein Quadrat, wovon b c eine Seite ist (Tab. II. Fig. VI.) in zwey kleinere zu verändern, die einander gleich sind, beschreibt man eine

Sei=

Seite des Quadrats einen halben Zirkel, und wenn die neuen Quadrate Hälften vom ersten werden sollen: theilet man den Bogen a m b c in gleiche Theile, ziehet dann aus dem Theilungspunkte b die geraden Linien b c, a b: diese werden Seiten der Quadrate seyn, wovon jedes die Hälfte von a c ist. (§. 37. b.) Sollen sie einander ungleich werden: so muß die Seite des einen z. B. b c gegeben seyn, dann ist die Seite des andern für sich selbst a b.

e) Da sich eine jede geradlinichte Figur durch Diagonallinien in Dreyecke; diese in Parallellograme (§. 45. 46.) und Rechtecke umbilden lassen: so können auf diese Art alle reguläre und irreguläre Figuren, auch der Zirkel miteingeschlossen verwandelt werden.

Anmerk. Die übrigen Verwandlungen wird ein Anfänger, wenn er einmal diese wohl durchstudirt hat, selbst finden. Ich will nur noch ein Paar Beyspiele davon anführen. 1) Gesetzt, man suche die Seite eines Quadrats, welches dreymal größer seyn solle, als das von a b (Tab. III. Fig. XVI.); so könnte man es zwar nach diesem §. a. finden: bequemer kann man aber so verfahren. Man setzt eine Linie a n von unbestimmter Länge unter einem rechten Winkel an a b; macht a c $=$ a b; ziehet die Hypothenuse c b: so ist $cb^2 = 2ab^2$. Trägt man jetzt die Hypothenuse c b auf a n; macht dann von dem Punkte m, auf welche sie hinfällt, eine neue m b herab: so ist $mb^2 = ab^2 + am^2 = cb^2 + ab^2$ (weil a m $=$ c b) $= 2ab^2 + ab^2 = 3ab^2$. So kann man ein Quadrat finden, das 4 oder 5mal größer ist, als ein gegebenes.

2) Es solle aus einer Figur a b d c e (Tab. III. Fig. XVII.) eine andere von gleicher Größe werden, die um eine Seite weniger hat, als diese. Man ziehet b c, und mit ihr eine gleichlaufende a f, der die verlängerte e c in f begegnen wird.

Wird nun von b nach f die gerade Linie b f gemacht: so ist das Viereck b f d e = dem Fünfecke a b c d e. Denn das $\triangle$ a b c = $\triangle$ b f c. (§. 30. b.) Es bleibt also gleiches, wenn anstatt $\triangle$ a b c das $\triangle$ b f c dem Stücke b c d e zugesetzt wird, welches durch das $\triangle$ b f c zu einem Vierecke wird.

V. Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren, und den daraus entstehenden Verhältnissen.

§. 47.

Zwey Dreyecke A B C, A b c (Tab. IV. Fig. I.) sind einander schon ähnlich, wenn man nur zween gleiche Winkel angeben kann.

Bew.

$$\begin{array}{l} A + B + C = 180 \\ a + b + c = 180 \\ \hline A + B + C = a + b + c \end{array}$$

subtrahirt man A = a und B = b: so wird

$$C = c$$

D. i. wenn zween Winkel beyderseits gleich sind, ist auch der dritte gleich: es sind aber jene Dreyecke ähnlich, welche drey gleiche Winkel haben (§. 15. a.) folglich auch die, bey welchen nur zween einander gleich sind.

a) Das rechtwinklichte Dreyeck a b c (Tab. I. Fig. XIII.) wird durch die Perpendikulär, welche aus dem rechten Winkel b auf die Hypothenuse gehet, in

zwey

zwey Dreyecke getheilt, die 1) dem großen, und 2) sich einander ähnlich sind.

Bew. des 1) Es ist im △ a b c, und im △ x, der Winkel bey e = b, als zween rechte: a ist gemeinschaftlich: also sind zween Winkel gleich, und folglich △ x ∽ △ a b c. Eben so ist der rechte Winkel bey e im △ y = dem Winkel b des △ a b c, und c gemeinschaftlich: folglich auch △ y ∽ △ a b c.

Bew. des 2) Wie bewiesen, ist

$$\triangle x \backsim \triangle a\,b\,c$$
$$\underline{\triangle y \backsim \quad a\,b\,c}$$

folglich $\triangle x \backsim \triangle\ y.$

Anmerk. Diese zween Hauptsätze sind eine von den wichtigsten, die sich die Anfänger wohl merken, und von einander unterscheiden müssen: 1) Dreyecke sind gleich, wenn nur zwo Seiten, und ein Winkel, oder zween Winkel und eine Seite: oder alle drey Seiten einander gleich sind. 2) Dreyecke sind ähnlich, welche nur zween gleiche Winkel haben.

§. 48.

Zwey Parallellograme von einerley Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen. (Tab. IV. Fig. II.)

Bew. $\underline{P : p = A\,B : a\,b}$

$$P : p = A\,B \times B\,C : a\,b \times b\,c.$$

Nach Voraussetzung des Satzes B C = b c: wenn also das 2te Verhältniß (I. Th. §. 107. IV.) damit dividirt wird, bleibt P : p = A B : a b.

a) Sind die Höhen gleich: so verhalten sie sich aus eben dieser Ursache, wie ihre Grundlinien.

b) Dreyecke sind die Hälften der Parallellograme: folglich sind auch die Sätze von diesen wahr. $\triangle ABC : \triangle abc = AB : ab$ oder $= BC : bc$.

c) Wenn das Verhältniß nicht rational ist: so nimmt man unendlichkleine Theile, in welchen der Fehler verschwindet, um so die Richtigkeit des Verhältnißes zu rechtfertigen.

§. 49.

Wenn man mit der Grundlinie B C eines Dreyeckes A B C eine gleichlaufende b c zieht, oder das kleinere Dreyeck A b c auf das große A B C legt, daß die Winkel A einander decken (Tab. IV. Fig. I.) so ist

1) $Ab : bB = Ac : cC$

2) $Ab : Ac = AB : AC$

3) $Ab : bc = AB : BC$

Bew. des 1)

Nach §. 48. b.	$\triangle Abc : \triangle bcB = Ab : bB$
nach §. 30. b.	$\triangle bcB = \triangle bcC$
folglich	$\triangle Abc : \triangle cBC = Ab : bB$
aber nach (§. 48.)	$\triangle Abc : \triangle cBC = Ac : cC$
(I. Th. §. 6. 4.)	$Ab : bB = Ac : cC$

Bew. des 2) Weil nun $Ab : bB = Ac : cC$

so ist (I. Th. §. 107. III.) $Ab : bB + Ab = Ac : cC + AC$

d. i.

D. i. NB. $Ab:AB = Ac:AC$
(I. Th. §. 107. I.) $Ab:Ac = AB:AC$

Bew. des 3)
Nach §. 48. a, b. $\triangle Abc:\triangle ABC = Ab:AB$
bey gleichen Höhen aber $= bc:BC$
folglich $Ab:AB = bc:BC$
versetzt $Ab:bc = AB:BC$

a) Eben so ist auch

$$Ab:AB = Ac:AC$$

wie schon der Beweis des 2ten Satzes bey NB. zeigt.

b) Setzt man an das rechtwinklichte Dreyeck ABC noch eines A B M: so ist gleichwie

$$Ab:bB = Ac:cC$$

eben dieß $Ab:bB = Am:Mm$
folglich auch $Ac:cC = Am:Mm$
Eben so läßt sich zeigen, daß auch

$$Ac:AC = Am:AM$$
$$Am:mc = AM:MC$$

seyn müße. D. i. die Sätze sind von allen schiefwinklichten Dreyecken wahr: sey hernach die Lage der Linien, wie sie immer wolle.

c) Da nun $\triangle ABC \backsim \triangle Abc$, es mag A b c auf, oder neben demselben liegen: A b und A B, b c und B C; A c und A C aber ähnlich liegende Sei-

ten sind (man nennt sie auch korrespondirende oder gleichnamige Seiten) welche Vermöge der bisherigen Beweise in Proportion stehen: da auch eben dieses vom △ A M C ∽ △ A m c wahr ist: so stehen überhaupt **die ähnlich liegenden Seiten ähnlicher Dreyecke mit einander in Proportion.**

d) Und da sich alle Figuren von mehr als drey Seiten in Dreyecke eintheilen lassen: so liegt die Wahrheit des in der ganzen Geometrie höchst wichtigen Satzes am Tage: Latera homologa figurarum similium sunt proportionalia. **Die ähnlich liegenden Seiten aller ähnlichen Figuren sind einander proportional.**

§. 50.

Wenn man aus dem rechten Winkel eines rechtwinklichten Dreyeckes a b c (Tab. I. Fig. XIII.) auf die Hypothenuse eine senkrechte Linie herabläßt, so ist

1) Diese Perpendikulär die mittlere Proportional zwischen den Abschnitten oder Segmenten der Hypothenuse.

2) Die kleinere Seite des Dreyeckes a b c ist die mittlere Proportional zwischen dem kleinern Segmente und der ganzen Hypothenuse.

3) Die größere Seite aber zwischen dem größern Segmente und der ganzen Hypothenuse. Die drey Sätze stehen also:

1)

1) ae : eb : ec

2) ae : ab : ac

3) ec : bc : ac.

Bew. des 1) Weil △ x ∽ △ y (§. 47. a.) so sind die ähnlich liegenden Seiten proportional: also verhält sich die kleinere Seite ae vom △ x zur kleinern eb vom △ y, gleichwie eben diese eb die größere Seite vom △ x zur größern ec vom △ y: folgl.

$$\frac{ae : eb = eb : ec}{ae : eb : ec}$$

Bew. des 2) Weil △ x ∽ abc: so ist ae als die kleinere Seite vom △ x zu ab als der kleinern Seite vom △ abc, gleichwie eben diese ab als Hypothenuse vom △ x zur Hypothenuse ac vom △ abc: also

$$\frac{ae : ab = ab : ac}{\text{D. i} \quad ae : ab : ac}$$

Bew. des 3) Weil wieder △ y ∽ △ abc: so ist die größere Seite ec vom △ y zur größern bc vom △ abc: gleichwie eben diese bc als Hypothenuse vom △ y zu der Hypothenuse ac vom △ abc, oder

$$\frac{ec : bc = bc : ac}{\text{D. i.} \quad ec : bc : ac}$$

a) Aus diesem läßt sich der pythagorische Lehrsatz nochmal ganz leicht beweisen. Nach dem 2ten und 3ten Theil des Satzes ist

(I. Th. §. 105.2.)
$$ae \times ac = ab^2$$
$$ec \times ac = bc^2$$
also $(ae + ec) \times ac = ab^2 + bc^2$

aber $ae + ec = ac$ folglich dieß substituirt

wird $ac \times ac = ab^2 + bc^2$

D. i. $ac^2 = ab^2 + bc^2$.

b) Dem ersten Theile des Satzes zur Folge ist eine jede Perpendikulärlinie, die von was immer für Punkten a, b oder c (Tab. II. Fig. XIII. und Tab. IV. Fig. VI.) der Peripherie auf den Diameter eines Zirkels gezogen wird, die mittlere Proportionallinie zwischen den Segmenten des Diameters, welche die Perpendikulär abschneidet: weil die aus den Punkten a, b, c, auf d und e gehenden Schenkel, wenn sie wirklich gezogen werden, rechtwinklichte Dreyecke bilden. (§. 30. b.)

c) Errichtet man irgend an dem Ende b eines Diameters a b (Tab. IV. Fig. III.) eine Tangente b c (§. 30. d.) ziehet dann vom andern Ende a desselben Diameters eine gerade a e c: so ist die Tangente b c die mittlere Proportional zwischen dem Stücke e c außer der Peripherie und der Sekante. Denn wenn man e b ziehet: so ist sie wieder wie oben auf a c senkrecht, und b c, die kleinere Seite des rechtwinklichten Dreyeckes a b c: also nach dem 2ten Theile dieses Satzes

$$ec : bc : ac$$

Daraus wird auch $bc^2 = ec \times ac$ und $bc = \sqrt{(ec \times ac)}$

Anmerk. Wenn in einem rechtwinklichten Dreyecke e c und e b gegeben wird: so kann man a e und folglich auch a c den Durchmesser des Zirkels a m b c finden. Denn weil (Tab. IV. Fig. VI.)

$$ec : eb : ae$$

so ist, wenn $ec = 25'''$, $eb = 50'''$

$$25''' : 50''' : ae$$

$$ae = \frac{2500'''}{25'''} = 100'''$$

Diesem $ec = 25'''$ addirt, ist $125 = ae + ec =$ dem Durchmesser a c. Theilet man dieses mit 2 div.: so bekömmt man $\frac{125}{2} = 62\frac{1}{2}$, den Radius, und also auch den Mittelpunkt des Zirkels.

§. 51.

1te Aufg. Zu a b und a c (Tab. IV. Fig. IV.) die dritte: 2) zu a b, a c, b d (Tab. IV. Fig. V.) die vierte Proportionallinie errichten.

Aufl. Man setze a b und a c (Tab. IV. Fig. IV.) unter einem beliebigen Winkel zusammen, und schließe die Figur mit b c, setze dann auch die Linie a c an a b, so daß $bd = ac$. Macht man nun d e mit b c gleichlaufend, und schließt die Oefnung mit c e: so ist c e, zu a b und a c die 3te Proportionallinie. Denn wenn man auch c x mit a d parallel macht: so ist der Winkel $xce = a$, $o = r$, als der äußere dem innern zwischen zwoen Parallelen c x, a d und b c, d e: folglich

$$\triangle abc \backsim \triangle cxe: \qquad \text{und}$$

$$ab : ac = cx : ce$$

c e ist also zu a b und a c die 3te Proportionallinie.

Aufl.

Aufl. des 2ten. a b und a c werden wieder unter einem beliebigen Winkel a zusammen, dann b d an a b gesetzt; nun b c und die mit b c gleichlaufende d e gezogen. Wird jetzt a c bis e verlängert: so ist c e zu a b, a c, b d die vierte Proportionallinie. Denn wenn man wieder c x mit b d parallel macht, so ist auch wieder $\triangle abc \backsim \triangle cxe$. Folglich

$$ab : bc = cx : ce$$

$$\underline{cx = bd \qquad \overline{ab : bc = bd : ce.}}$$

§. 52.

2te Aufg. 1) Zwischen a e und e c die mittlere Proportionallinie finden (Tab. IV. Fig. VI.) 2) Am Ende b einer Linie a b eine Perpendikulär errichten. (Tab. IV. Fig. VII.)

Aufl. des 1ten. Man setzt a e, e c in eine gerade Linie a c zusammen (Tab. IV. Fig. VI.) sucht das Mittel f der Linie a c, und beschreibt mit dem Radius a f den halben Zirkel a b c. Wird nun jetzt auf e eine Perpendikulär e b gemacht; so ist sie nach §. 50. b. die mittlere Proportional zwischen a e und e c.

Aufl. An einem beliebigen Punkte c außer der Linie a b (Tab. IV. Fig. VII.) setzt man den Zirkel an, und beschreibt mit einer Oefnung einen Zirkel, der genau durch den Punkt b gehet, und die Linie a b noch irgendwo in einem Orte schneidet z. B. in e. Aus diesem Punkte e wird nun durch c an die

Pe=

Peripherie hin ein Durchmesser e d, und von b an d eine gerade Linie fortgezogen. Diese ist auf a b senkrecht, nach (§. 30. b.)

Anmerk. Durch die Auflösung der ersten Aufgabe werden wir in Stand gesetzt, die Gleichung des Zirkels: $y^2 = ax - x^2$ zu beweisen, welche wir bisher und besonders im ersten Theile §. 162. u. ff. blos angenommen haben. Es sey nämlich die Ordinate y = e b. (Tab. IV. Fig. VI.) Der Durchmesser a = a c: die Absciße x = e c: so ist das Segment a e oder a c — e c = a — x.

Da nun $ec : eb : ae$
so ist, wenn man substituirt

$$x : y : a - x$$

(I. Th. §. 105. 2.) $y^2 = (a - x)\,x$

folglich $y^2 = ax - x^2$

Auch läßt sich aus jedem unvollkommenen Quadrate z. B. 7 die $\surd$ vollkommen, aber nur in Linien ausziehen. Man nimmt vom Maaßstabe eine Linie e c = 1, und eine a = 7; setzt sie wie in der ersten Aufgabe in eine = a c zusammen, und sucht den Perpendikel e b. Dieser wird die Wurzel aus 7 seyn. Denn weil $ec \times ae = eb^2$: so ist $eb = \surd(ec \times ae)$. Also $cb = \surd 7$. So kann hier die Geometrie mehr, als die Arithmetik leisten. Der Grund liegt nach Hrn. Prof. Kästner darinn, weil die Geometrie die Gränzen des Ganzen bestimmt, da die Arithmetik die Theile, deren Menge unendlich ist, nur nach und nach suchen muß.

§. 53.

Aehnliche Dreyecke verhalten sich, wie die Quadrate ihrer korrespondirenden oder ähnlich liegenden Seiten: D. i. wie die Quadrate ihrer Höhen oder Grundlinien ꝛc. (Tab. IV. Fig. I.)

Bew. $\triangle Amc : \triangle AMC = Am^2 : AM^2$

(§.

(§. 49. a.) $Am : AM = Ab : AB :$
$= mc : MC.$

also $mc : MC = Ab : AB$

$$Ab = \frac{mc \times AB}{MC}$$

auch ist $\triangle Amc : \triangle AMC = \frac{Ab \times mc}{2} : \frac{AB \times MC}{2}$
$= Ab \times mc : AB \times MC$

so ist

für Abm $c \times AB$ subst. $\times MC$ und $: AB$ $\frac{mc \times AB}{MC} = \frac{mc \times mc \times AB}{MC} : AB \times MC$
$= mc \times mc : MC \times MC$

folglich $\triangle Amc : \triangle AMC = mc^2 : MC^2.$

a) Da sich wieder alle Figuren auf Dreyecke bringen lassen: **so verhalten sich überhaupt die ähnlichen Figuren, wie die Quadrate ihrer ähnlichliegenden Seiten.** (Figurae similes sunt vt quadrata laterum homologorum).

b) Zween Zirkel verhalten sich also wie die Quadrate ihrer ganzen oder halben Durchmesser.

Anmerk. So kann man mit Rechte schließen, und daraus das Verhältniß 1000 : 785 herleiten, welches das Quadrat des Durchmessers zu der Zirkelfläche hat. Denn weil das Quadrat des Durchmessers $= 100^2 = 10000$, und der Innhalt $= \frac{DP}{4}$ (§. 42.) $= \frac{100 \times 314}{4} = 7850$: so ist das Quadrat des Durchmessers zur Zirkelfläche: oder $D^2 : Q = 10000 : 7850 = 1000 : 785$. Ich will aber einen Satz von so gro-

ßer

ser Wichtigkeit nach Klemms Vorschrift noch etwas schärfer beweisen.

§. 54.

Wenn das Verhältniß des Diameters zur Peripherie allgemein $= 1 : p$; der Durchmesser $= 2\,r$: so ist in einem Zirkel

1) Die Peripherie $P = 2\,r\,p$

2) Der Innhalt $Q = r^2\,p$.

Bew. des 1) $1 : p = 2r : P$

also $P = 2\,r\,p$

Bew. des 2) Nach §. 42. ist

$$Q = \frac{D\,p}{4} = \frac{2\,r\,p}{4} = \frac{r\,p}{2}$$

nach obigem Bew. $P = 2\,r\,p$.

Also $Q = \frac{2\,r^2\,p}{2} = r^2\,p$

a) Setzt man statt $2\,r = D$: so ist $Q = \left(\frac{D}{2}\right)^2 p$

$$= \frac{D^2\,p}{4}.$$

b) Wenn also P, p, R, r die Peripherien und Stralen zweener Zirkel ausdrücken: so ist

$P : p = 2\,R\,p : 2\,r\,p$.

$:2p \quad P : p = R : r$.

D. i. die Peripherien zweener Zirkel verhalten sich wie ihre ganzen oder halben Durchmesser.

c)

c) Wenn nun auch Q die Flächen zweener Zirkel anzeigt: so ist nach dem 2ten Satze

$$Q : q = R^2 p : r^2 p$$

$$:p \qquad Q : q = R^2 : r^2$$

$$= D^2 : d^2 \text{ nach a.}$$

D. i. die ganzen Zirkel oder Zirkelflächen verhalten sich gegeneinander wie die Quadrate ihrer halben oder ganzen Durchmesser.

d) Wird nun für 1 : p gesetzt 100 : 314: so wird das Quadrat des Diameters zur Zirkelfläche, oder nach a

$$D^2 : \frac{D p}{4} = 10000 : \frac{100 \times 314}{4}$$

$$= 10000 : 7850$$

$$= 1000 : 785$$

Wodurch sich der Innhalt des Zirkels angeben läßt, ohne daß man vorher die Peripherie berechnen muß.

Anmerk. Die Verhältnisse 100 : 314 und 1000 : 785 verdienen wegen ihrem so vielfältigen Nutzen auswendig gemerkt zu werden. Ich umgehe hier übrigens ihren Gebrauch, der schon in den untern Schulen gezeigt wird. Nur die Art den Innhalt eines Abschnittes a b d e (Tab. III. Fig. I.) zu suchen, will ich in einem Beyspiele zeigen. Es sey die Sehne a d = 100, die Höhe b e = 25, der Bogen a b d = 40°. Man sucht 1) nach der Anmerkung des §. 50. den Durchmesser des Kreises, wovon a b d ein Bogen ist, also

$$25 : \frac{100}{2} : x$$

$$x = 50^2 = \frac{2500}{25} = 100$$

Diesem 25 zugesetzt, oder 100 + 25 = 125 giebt den Durchmesser. 2) Sucht man auch die Peripherie

$$100 : 314 = 125 : x$$

$$x = \frac{314 \times 125}{100} = 392 \frac{500}{100}$$

$= 392, 50^\circ$. Um sie aber im Längenmaaße zu bekommen, muß man nach der Anmerk. des 42. §. verfahren. Man erhält dann den Bogen von $40^\circ = 136'''$. 3) Wird nun der halbe Radius $= \frac{125}{4}$ multiplizirt: so kömmt $136 \times \frac{125}{4} = 4250$: wird aber die Sehne mit $\frac{125}{4}$ multiplizirt, so giebt es 3125: wird endlich dieses von jenem abgezogen: so erhält man $4250 - 3125 = 1125$ den Innhalt des Segments a b d e.

§. 55.

Wenn man durch einen Punkt e inn- oder außerhalb des Zirkels zwo gerade Linien macht, welche die Peripherie des Zirkels in a, b, c, d (Tab. IV. Fig. VIII.) berühren oder schneiden: so ist

$$ae : eb = ed : ec$$

Bew. Wenn wir die Blindlinien a b, d c ziehen: so ist

$$\triangle aeb \backsim \triangle dec$$

weil der Winkel $\quad a = d = \frac{bc}{2}$

und $\quad o = u$ (§. 10.)

also (§. 49. 2.) $\quad ae : eb = ed : ec$

a) Aus $ae : eb = ed : ec$ wird $ae \times ec = eb \times ed$: d. i. das Produkt der Abschnitte von derley Linien ist einander gleich.

b) Schneiden sich a c und d b unter einem rechten Winkel, und ist b d ein Durchmesser, wie in der VIten Figur: so wird b d in zween gleiche Theile (§. 32.) getheilt, und ist

$$ae : eb = eb : ec$$

oder

oder $ae : eb : ec$

also eb wieder die mittlere Proportional zwischen ae und ec wie ich §. 50. 1. bewiesen habe.

c) Wird der Punkt a außerhalb der Peripherie angenommen, ist wieder wie oben (Tab. IV. Fig. IX.)

$$ae : eb = ed : ec$$

D. i. die außer der Peripherie befindlichen Stücke sind mit den ganzen Linien ec, ed in verkehrter Proportion. Denn wenn man ad, bc zieht: so ist der Winkel $c = d$, weil sie gleiches Maaß $\frac{ab}{2}$ haben: da nun der Winkel e gemeinschaftlich: so ist (§. 47.) $\triangle ebc \backsim \triangle aed$: und also

(§. 49.) $ae : ed = eb : ec$

versetzt $ae : eb = ed : ec.$

Anmerk. Der Hauptsatz dieses Paragraphs ist hier nach den Euklides von Hr. von Segner und Hr. Prof. Klemm allgemein bewiesen. Letzterer stellet dieses vielen Lehrbüchern aus, daß sie den Beweis nur für den Fall geben, wenn die Sehne den Durchmesser senkrecht schneidet. Merkwürdig ist, daß Herr Sulzer den Begriff des Schönen, in so fern es der Verstand erkennet, aus dieser Lehre zu erläutern sucht. Nicht zufrieden mit dem dunkeln Erkenntniß, und der undeutlichen Vorstellung des Mendelsohns u. a. bemühet er sich zu zeigen, wie das Vergnügen an der Schönheit durch alle allgemein erwiesene Fälle diesem Lehrsatze zur Folge zunehme, und sich also auf deutliche Begriffe gründen müße.

VI. Ab-

VI. Abschnitt.

Von den Körpern.

Von dem dichten Innhalte der Körper.

§. 56.

1) Wenn sich was immer für eine Fläche z. B. ein Dreyeck a d c (Tab. IV. Fig. X.) von a bis b immer gleichlaufend herabbewegt: so entstehet eine stettige Größe oder ein Körper, den man *Prisma* oder einen *Pfeiler* heißt.

2) Es ist also das Prisma ein Körper, welcher von zwo gleichen und ähnlichen parallelen Grundflächen, und eben so vielen Seitenflächen, die allemal Parallellogramme sind, eingeschlossen ist, als die Grundfläche Seiten hat.

a) Von der Zahl der Seiten, welche die Grundfläche hat, wird das Prisma dreyeckicht, viereckicht ꝛc. von der Lage aber senkrecht, wenn die Seiten auf der Grundfläche senkrecht stehen; schief, wenn sie mit derselben einen schiefen Winkel machen.

b) Sind nur die Parallelflächen bey einem viereckichten Prisma gleich, heißt es ein Parallelepipedum. (Tab. IV. Fig. XII.) sind aber Grund- und Seitenflächen gleich und lauter Quadrate (Tab. IV. Fig. XIII.) so heißt das viereckichte Prisma *Würfel*.

c) Wenn die Grundfläche ein unendlichseitiges Vieleck ist, so wird sie zu einen Zirkel (§. 40. b.) und also das daraus entstehende Prisma zu einer Walze, oder Zylinder (Tab. IV. Fig. XIV.) Die Walze ist also nichts anders, als ein Prisma von unendlichvielen, und unendlichschmalen Seitenflächen. Cylinder est Prisma infinitilaterum.

d) Schneidet man ein Prisma, oder Zylinder an was immer für einem Orte z. B. bey P (Tab. IV. Fig. X.) parallel: so wird der Schnitt eine der Grundfläche gleiche und ähnliche Figur geben. Die Lage des Prisma, oder Zylinders möge gerade oder schief seyn.

Anmerk. So wie die Flächen ebene, haben Körper körperliche Winkel. Es entstehet aber ein körperlicher Winkel aus mehrern ebenen Winkeln, die eine gemeinschaftliche Spitze haben. Ein jedes Ecke eines Zimmers ist ein körperlicher Winkel. Darum gehören zu einen solchen wenigst drey Seiten, weil die ebenen Winkel, aus denen er bestehet, nicht in einer Fläche liegen dürfen, so muß ihre Summe allemal kleiner als 360° seyn.

§. 57.

Den dichten Innhalt des Prisma, Parallelepipedums, und der Walze giebt die Grundfläche $= b^2$ in die Höhe $= a$ multiplizirt: oder

$$\text{Pris.} = a\,b^2.$$

Denn es ist die Grundfläche so oft im Prisma enthalten: oder das Prisma bestehet aus so vielen gleichen Theilen der Grundfläche, als Punkte, oder Theile auf der Höhe sind: dieses giebt aber die Grundfläche in die Höhe multiplizirt.

1) Anmerk. So wie der Beweis hier, und auf eine ähnliche Art vom Innhalte des Parallellogrammes (§. 36.) gegeben ist, ist er auch von den letzten Differentialien der Körper und Flächen wahr, welche doch schon Produkte aus Höhen in Grundflächen, oder Grundlinien sind. (I. Th. §. 169. Anmerk. und 170.) Es sagt zwar Klemm mathem. Lehrb. §. 637. eigentlich zu reden, gebe eine Linie, sie möge so oft multiplizirt werden, als sie wolle, nur wieder eine Linie: man könne also nicht sagen, der Innhalt des Prisma sey das Produkt seiner drey Seiten: sondern man müße selbst einen Körper z. B. einen Würfel zur Einheit machen, und sehen, wie oft dieser in dem andern enthalten sey, so wie er das Quadrat zum Flächenmaaß macht. Allein obschon die Linie c d (Tab. II. Fig. VII.) wenn sie ihrer Breite nach gegen a aufwärts fließt, nur Merkmaale einer Linie zurückläßt: so wächst doch die Anzahl dieser Merkmaale mit der Anzahl der Punkten der Linie a c, durch welche sie geflossen ist. Diese Anzahl der Linien giebt offenbar einen Raum, der eine Länge c d hat, und eine solche Breite, als die Menge der Punkte oder Theile der Linie a c ist. Auf eine ähnliche Art scheint sich wohl die Entstehung einer Tiefe und also eines Körpers durch eine auf = oder abwärtsfließende Fläche a c d (Tab. IV. Fig. X.) von a bis P begreifen zu lassen.

a) Ist das Prisma ein Würfel (Tab. IV. Fig. XIII.) so bestehet die Grundfläche aus dem Quadrate einer Seite a c, oder aus ac^2; da nun auch die Höhe $ab = ac$ ist: so giebt $ac^2 \times ab = ac^3$ den körperlichen Innhalt des Würfels.

b) So wie schiefe Parallellogrammе von eben dem Innhalte sind, wie senkrechte, welche mit jenem einerley Höhen und Grundlinien haben, sind es auch die Prismate, Walzen ꝛc. wenn sie gleiche Höhen und Grundflächen haben. Man erhält daher die Dichtigkeit eines schiefen Prisma, Parallelepipedums, oder Walze,

wenn man die Grundfläche mit der Perpendikulärhöhe multiplizirt.

c) Heißt man die Grundfläche der Walze C, den Durchmesser derselben D: so ist C D eine Walze, deren Durchschnitt und Höhe einander gleich sind.

a) Anmerk. Nach der Differentialrechnung läßt sich die Sache am leichtesten so zeigen. Es sey die Fläche a r c (Tab. IV. Fig. XV.) $= b^2$. Wenn sich nun b^2, an einem Orte P befindet, durch einen unendlichkleinen Theil P p fortfließt, und P M mit der senkrechten Höhe a e immer einen rechten Winkel behält: so kann a P die Absciße x bedeuten, und P p wird das Differential d x: die Ordinate aber, oder vielmehr ihr Quadrat selbst die beständige Fläche b^2 seyn. Also wird das Differential der körperlichen Figur $b^2\,dx$, dessen Integral $S\,b^2\,dx = b^2\,x$ werden. Setzt man nun $x = a$, oder der ganzen Höhe: so zeigt sich wieder, daß der körperliche Innhalt überhaupt ein Produkt aus der Grund- oder Mutterfläche in die senkrechte Höhe sey: es möge hernach die Lage desselben schief oder senkrecht seyn.

§. 58.

1) Ein dreyeckichtes Prisma vom Holze läßt sich durch Diagonalen der Seitenflächen in drey Pyramiden schneiden, welche gleiche Höhen und Grundflächen: folglich auch gleichen körperlichen Innhalt haben.

2) Es ist also der körperliche Innhalt einer Pyramide, oder Spitzsäule (Tab. IV. Fig. XVI.) dem dritten Theile eines Prisma gleich, welches mit ihm einerley Höhe a, und Grundfläche b hat, oder

$$\text{Pyr.} = \frac{a\,b^2}{3} \qquad a)$$

a) Der Satz ist nicht nur von der dreyeckichten, sondern von einer jeden vieleckichten Pyramide wahr; weil sich ein jedes vieleckichtes Prisma durch die Diagonalen in dreyeckichte verwandeln läßt. Eine vieleckichte Pyramide von lauter ausgehenden Winkeln wird allemal der dritte Theil eines eben so vieleckichten Prismas seyn.

b) Was die Pyramide gegen das Prisma, das ist der Kegel (Tab. IV. Fig. XVII.) gegen die Walze: es ist also auch der Kegel der dritte Theil einer Walze von eben der Höhe a und der Grundfläche b: oder

$$\text{Con.} = \frac{a\,b^2}{3}.$$

c) Schneidet man eine Pyramide, oder einen Kegel an was immer für einem Orte mit der Grundfläche parallel: so ist der Schnitt allemal eine der Grundfläche ähnliche Figur (§. 15. 2.) Es sey hernach der geschnittene Körper schief oder senkrecht.

d) Die gestimmelte Pyramide oder Walze q r b d (Tab. IV. Fig. XVI. und XVII.) kann man als eine ganze betrachten, und als eine solche berechnen: sucht man nun auch die fehlende a q r, und ziehet dieses von der ganzen ab, so erhält man die gestimmelte q r b d.

Anmerk. Auch dieser Satz läßt sich nach der Differentialrechnung also beweisen: a b c d (Tab. IV. Fig. XVIII.) sey eine jede Pyramide. Man errichte auf die Grundfläche bey b eine Perpendikulär e b, und mit eben derselben die gleichlaufenden a e; und M P, welche a b in M schnei-

den wird. Stellt man sich nun vor, der Punkt P gehe von e nach b senkrecht, und führe das Dreyeck M d o, welches mit P M und der Grundfläche b c d ein paralleler Schnitt der Pyramide ist, so mit sich fort: setzt alsdann die Höhe e b $= a$; den Theil e P $= x$; eine Seite b d $= b$; M o $= y$: so ist, weil sich Dreyecke verhalten, wie die Quadrate der ähnlichliegenden Seiten. (§. 47.)

$$\triangle Mro : \triangle bcd = x^2 : a^2$$
$$= y^2 : b^2$$
$$y^2 : b^2 = x^2 : a^2$$
$$y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

Wo $y^2 = \triangle M d o$, und $b^2 =$ der Grundfläche b d. Gleichwie nun y d x das Differential der Fläche (I. Th. §. 170.) so giebt hier $y^2 \, dx$, oder y^2 mit der unendlichkleinen Höhe P p multiplizirt das Differential des Körpers. Weil nun beym Prisma $y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}$, so wird, wenn man beyderseits mit d x multiplizirt,

$$y^2 \, dx = \frac{b^2 x^2 \, dx}{a^2}$$

und $$S y^2 \, dx = \frac{b^2 x^3}{3 a^2} = \frac{b^2 a^3}{3 a^2} = \frac{b^2 a}{3}$$

Wenn nämlich für x die ganze Höhe a gesetzt wird, d. i. die Pyramide ist der 3te Theil des Produkts aus der Höhe in die Grundfläche.

§. 59.

Die Kugel gleichet $\frac{2}{3}$ einer Walze, welche einerley Höhe und Durchmesser hat.

Bew. Man mache das Quadrat a b c d (Tab. V. Fig. I.) dann aus a den Quadranten c m d,

und

und die Diagonal a b. Stellt man sich nun vor, diese ganze Figur werde um die Achse a c herumbewegt, so wird aus allen Durchschnitten von a c b d eine Walze; von a c m d eine halbe Kugel; von a c b ein Kegel werden. Macht man jetzt einen gemeinschaftlichen Durchschnitt e f für alle drey, und zieht den Stral a m: so ist e f der Durchschnitt der Walze, e n des Kegels, e m der Kugel. Nun ist

$$am^2 = ae^2 + em^2$$

$$am = ad = ef$$

also $$ef^2 = ae^2 + em^2$$

weil aber $ae : en = ac : cb$, und $ac = cb$ als Seiten eines Quadrats: so ist auch $ae = en$. Setzt man daher für a e die Seite e n: so ist

$$ef^2 = en^2 + em^2$$

$-en^2$ $$ef^2 - en^2 = em^2.$$

Also auch

$$\text{Sum. } ef^2 - \text{Sum. } en^2 = \text{Sum. } em^2$$

oder Walz. — Kegel = Kugel.

Aber wenn die Walze $= 1$: so ist der Kegel $= \frac{1}{3}$: also die Kugel $= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Anmerk. Dieß ist der Beweis, welchen Archimedes vor allen seinen übrigen Erfindungen so sehr schätzte, daß er ihn auf sein Grabmaal zu stechen befahl. Wir werden aber auch den Satz eben so leicht aus der Integralrechnung beweisen. Nur das Element will ich kurz voranschicken.

§. 60.

Wenn sich das ebene Stück a P M (Tab. III. Fig. VIII.) um die Achse a P herumbewegt: so wird

es

es einen dichten Körper von eben der Gestalt, von welcher die Krümmung a m ist, erzeugen. Von dem unendlichnahen P M, p m wird aber nur eine unendlichniedere Walze entstehen, weil P M, p m als viereckicht angesehen werden kann. (I. Th. §. 170.) Nun sey der Durchmesser zur Peripherie $= r : p$. Auch sey $aP = x$: so ist $Pp = dx$. Da auch $PM = y$: so wird die mit P M beschriebene Peripherie $= \frac{py}{r}$; die Fläche desselben $= \frac{py}{r} \times \frac{y}{2}$ (§. 42.) $\frac{py^2 dx}{2r}$ aber das Differential des Körpers.

Von was immer für einer Krümmung nun die Oberfläche eines Körpers sey, wenn nur y^2 einmal bekannt ist, so darf es nur nebst ihrem gleichgiltigen Werthe mit $\frac{pdx}{2r}$ multiplizirt, und dann integrirt werden: das Integral wird allzeit den körperlichen Innhalt geben.

2) Wenn also a M ein Zirkelbogen ist, und in der Gleichung des Zirkels 2 r statt dem Durchmesser gesetzt wird: so ist

$$y^2 = 2rx - x^2$$

$$\times \frac{pdx}{2r} \qquad \frac{py^2 dx}{2r} = \frac{2prxdx - px^2 dx}{2r} = pxdx - \frac{px^2 dx}{2r}$$ } Das Differential, oder Element der Kugel.

Integr. $$S\frac{py^2 dx}{2r} = \frac{px^2}{2} - \frac{px^3}{6r}$$

Macht

Macht man x der ganzen Höhe = 2 r gleich: so wird

$$S\frac{py^2dx}{2r} = \frac{4pr^2}{2} - \frac{8pr^3}{6r}$$
$$= 2pr^2 - \tfrac{4}{3}pr^2$$
$$= \tfrac{2}{3}pr^2.$$

pr^2 ist der Innhalt des Zylinders, folglich die Kugel $\frac{2}{3}$ desselben.

a) Es verhalten sich also die Walze, Kugel und Kegel von gleicher Höhe und Durchschnitten, wie

$$1, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3} = 3, 2, 1.$$

b) Weil $\frac{pr}{2}$ eine Zirkelfläche ist: (§. 42.) so ist 2 pr vier größten Zirkelflächen gleich, und also auch der Innhalt der Kugel $\frac{2}{3}pr^2 = 2pr \times \frac{1}{3}r$ vier größten Zirkelflächen mit dem dritten Theile des Radius multiplizirt.

c) Betrachtet man aber die Kugel, als bestünde sie gleichsam aus unendlichvielen Kegeln, deren Spitze in dem Mittelpunkte zusammenstoßen, die unendlichkleinen Grundflächen aber die Oberfläche der Kugel ausmachen, und heißt man die Oberfläche S, den Radius R: so ist nach (§. 57. b.) die Dichtigkeit der Kugel = $\frac{RS}{3} = \frac{DS}{6}$.

Anmerk. Die Verwandlung der Körper läßt sich nun theils aus von Papier gemachten Körpern, theils aus den bisherigen leicht selbst erfinden. Man darf ein Parallelepipedum und vieleckichtes Prisma beynahe nur ansehen, so wird man schon darauf verfallen, daß sich jenes durch einen Diagonalschnitt in zwey; dieses in so viele dreyeckichte Prismate theilen lasse, als die Grundlinie Seiten hat weniger zwey: so wie man auf

eine

eine ähnliche Art von der Theilung der Vielecke §. 28. gesagt hat. Die Veränderung der Walze in ein Prisma; eines Prisma und der Walze in 3 Pyramiden oder Kegel, und umgekehrt, verdienen nicht mehr erwähnt zu werden. S. Klemms mathem. Lehrb. §. 620. Nur das sogenannte delphische Problem will ich noch auflösen.

§. 61.

Aufg. Man soll zween gleiche Würfel in einen verwandeln, der beyden zusammengenommen gleich sey.

Aufl. Die Seite eines der gegebenen Würfel sey a, so ist sein körperlicher Innhalt $= a^3$. Wenn nun eine Seite des noch so großen $= x$: so ist sein Innhalt $= x^3$. Damit nun $x^3 = 2a^3$ werde, muß man $x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$ bekommen. Man erhält aber dieses, wenn man zwischen a, und 2 a zwo mittlere kontinuirliche Proportionalen sucht. Dann wird diese Progreßion daraus werden: $a : x : y : 2a$.

Nun ist I. $a : x : y$

also $y = \frac{x^2}{a}$

quadrirt $y^2 = \frac{x^4}{a^2}$

II. $x : y : 2a$

$y^2 = 2ax$

für y^2 subst. $\frac{x^4}{a^2} = 2ax$

: x und × a^2 $x^3 = 2a^3$

$\sqrt[3]{}$ $x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$.

Wenn

Wenn man also zu a, und 2 a zwo mittlere kontinuirliche Proportionalen sucht, so ist die erste davon die Seite eines zweymal so großen Würfels als a^3 ist, man möge es arithmetisch oder geometrisch verlangen. Arithmetisch heißt die Auflösung der Aufgabe: man multiplizire die Seite des gegebenen Würfels mit der Kubikwurzel aus 2, das Produkt giebt die Seite des Würfels, der noch so groß ist als der gegebene.

Anmerk. Dieses Problem soll einst das delphische Orakel den Atheniensern aufgegeben, und sie von der Pest zu befreyen versprochen haben, wenn sie den Altar des Apollo zu Delphi, der ein völliger Würfel war, noch einmal so groß machen würden. Lange wollte sich keiner von den Weisen Griechenlandes an die Auflösung der Aufgabe wagen, bis endlich der alexandrinische Bibliothekär Erastothenes, und der schon genannte Hypokrates auf die zwo mittlere Proportionalen verfielen.

Von den Oberflächen der Körper.

§. 62.

Die Oberfläche eines jeden regulären oder irregulären Körpers die Kugel ausgenommen erhält man überhaupt, wenn man die Grund- und Seitenflächen nach §. 36, 37, 39, 40 berechnet, und in eine Summe sammelt. Diese Summe wird allemal die ganze Oberfläche seyn.

a) Auf diese Art bestehet die Oberflächedes Pfeilers aus der doppelten Grundfläche, und so vielen Parallellogramen, als die Grundfläche Seiten hat. Ist die Grundfläche eine reguläre Figur: so giebt die Summe

me der Seiten in die Höhe multiplizirt + der doppelten Grundfläche die Oberfläche (Tab. IV. Fig. XI.) des senkrechten Pfeilers.

b) Des Würfels seine sind 6 gleiche Quadrate, als so viele Seitenflächen: das Quadrat einer Seite mit 6 multiplizirt ist also seine Oberfläche.

c) Die Oberfläche des Zylinders giebt die Peripherie der Grundfläche mit der senkrechten Höhe multiplizirt + der doppelten Grundfläche.

d) Die Pyramide bestehet aus lauter Dreyecken, als Seitenflächen und einer Grundfläche. Die Höhe eines jeden Dreyeckes ist die von der Spitze a auf die Grundlinie b d herabgefällte Perpendikulär a n (Tab. IV. Fig. XVIII.) Die Summe aller dieser Dreyecke + der Grundfläche macht daher die Oberfläche der Pyramide aus.

e) Die gestimmelte Pyramide (Pyramis truncata) enthält zwo Grundflächen, und so viele Trapeze, als Seitenflächen, so viel die Grundflächen Seiten haben: die Summe dieser Trapeze + der obern und untern Grundfläche werden also diese Oberfläche liefern.

f) Der Kegel als eine unendlichseitige Pyramide hat für seine Höhe selbst die Seite a b, für die Seiten der Grundfläche aber die Peripherie seiner Grundfläche. Wird also a b in die Peripherie der Grundfläche multiplizirt, dann mit 2 dividirt, und die Grundfläche addirt: so ist die Oberfläche des Kegels gefunden.

g) Den gestimmelten Kegel kann man wieder als einen ganzen berechnen, und dann von der gefundenen Oberfläche die Oberfläche des Stückes a q r abziehen: die Grundfläche von a q r ausgenommen, als welche die obere Grundfläche des gestimmelten Kegels ausmachen muß.

§. 63.

Die Oberfläche S der Kugel ist vier größten Zirkeln C gleich, oder

$$S = 4\,C$$

Wenn der Durchmesser der Kugel $= D$: so ist nach §. 57. c.

$$\text{Cyl.} = C\,D$$

$$\text{Sphaer.} = \tfrac{2}{3}\,\text{Cyl.} = \tfrac{2}{3}\,C\,D$$

auch ist $\text{Sphaer.} = \frac{D\,S}{6}$ (§. 60. c.)

also $\frac{D\,S}{6} = \tfrac{2}{3}\,C\,D$

$$D\,S = \tfrac{12}{3}\,C\,D = 4\,C\,D$$

$$S = \frac{4\,C\,D}{D} = 4\,C$$

Anmerk. Eben diese $S = 4\,C$ stellt auch die Integralrechnung her, wenn nur einmal das Differential oder Element der Oberfläche gefunden ist. Ich will hier beydes suchen.

§. 64.

Wenn wieder das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie $= r : p$, a M P sich um a P bewegt,

(Tab.

(Tab. III. Fig. VIII.) und $aP = x$; $PM = y$: so ist $MR = dx$; $mR = dy$; $Mm = \surd(dx^2 + dy^2)$ Die Peripherie $= \frac{p}{r}$; welche die Ordinate beschreibt, wird $= \frac{py}{r}$. Läßt man nun diese Peripherie von P bis p herabfließen, so wird sie um Mm wachsen: man muß sie also mit dem Werthe von Mm multipliziren, und dann wird $\frac{py}{r} \surd(dx^2 + dy^2)$ das Element der Oberfläche. Wird nun jetzt dx^2 oder dy^2 aus der Gleichung einer krummen Linie gefunden, dann $\frac{py}{r} \surd(dx^2 + dy^2)$ beyderseits hergestellt und integrirt: so giebt das Integral die gesuchte Oberfläche.

2) Im Zirkel ist, wenn man statt dem Durchmesser a wieder 2 r setzt,

$$y^2 = 2rx - x^2$$

Diff. $\quad 2y\,dy = 2r\,dx - 2x\,dx$

$:2y \quad dy = \frac{2r\,dx - 2x\,dx}{2y} = \frac{r\,dx - x\,dx}{y.}$

Quadr. $\quad dy^2 = \frac{r^2dx^2 - 2rx\,dx^2 + x^2dx^2}{y^2}$

$$\frac{py}{r}\surd(dx^2 + dy^2) = \frac{py}{r} \times \surd\left(\frac{r^2dx^2 - 2rx\,dx^2 + x^2dx^2}{y^2} + dx\right)$$

für y^2 subst. $2rx - x^2$

=

$$=\frac{py}{r}\sqrt{\left(\frac{r^2dx^2-2rxdx^2+x^2dx^2}{2rx-x^2}+dx\right)}$$

unt. einerl. Ben.

$$=\frac{py}{r}\sqrt{\left(\frac{r^2dx^2-2rxdx^2+x^2dx^2+2rxdx-x^2dx^2}{2rx-x^2}\right)}$$

red. u. y^2 hergest. $=\frac{py}{r}\sqrt{\frac{r^2dx^2}{y^2}}$

$\surd$ ausgez. $=\frac{pyrdx}{ry}=pdx$

Integr. $S\frac{py}{r}\surd(dx^2+dy^2=px$

Wenn $x=2r$ $=2pr=$ Superf. Circ.

Nun ist $2pr=\frac{4pr}{2}$

aber $\frac{pr}{2}=C$ (§. 42.)

also $\frac{4pr}{2}=4C$

endlich $2pr=4C$

a) Ein größter Zirkel ist auch gleich $\frac{PD}{4}$: oder

$$C=\frac{PD}{4}$$

also ist auch $4C=PD$

D. i. man erhält die Oberfläche einer Kugel, wenn man nur den Durchmesser mit der Peripherie des größten Zirkels multiplizirt.

Anmerk. Die Oberflächen aller regulären und irregulären Körper werden nach dem Hauptsatze des §. 61. ausgerechnet. Die

Dich=

Dichtigkeit zu finden, kann man die reguläre als eine Pyramide ansehen, deren Grundfläche die Summe aller Seitenflächen, die Höhe aber der halbe Durchschnitt des Körpers ist. Die irreguläre pflegt man nur in einen mit Wasser oder Sand gefüllten Zylinder, oder genaues Parallelepipedum zu legen, zieht hernach den Raum, welcher sich nach dem herausgenommenen irregulären Körper zeigt, von dem ganzen Innhalt des Zylinders oder Parallelepipedums ab: der Rest giebt die gesuchte Dichtigkeit.

§. 65.

1) Weil die Pfeiler, Pyramiden, Parallelepipede, ein zusammengesetztes Maaß aus der Grundfläche in die Höhe haben: so verhalten sie sich wie die Produkte aus den Höhen in die Grundflächen.

2) Sind die Höhen gleich: so verhalten sie sich, wie die Grundflächen.

3) Nur wie die Höhen, wenn die Grundflächen gleich sind.

4) Weil die Grundflächen zweener Würfel Quadrate sind, und die Höhe wieder einer Seite der Grundfläche gleich ist: so verhalten sich die Würfel gegen einander, wie die Kubikzahlen ihrer Seiten.

§. 66.

Der Würfel des Durchmessers verhält sich zur Kugel = 300 : 157.

Bew. Weil der Durchmesser zur Peripherie = 100 : 314: so ist nach (§. 63. a.)

$$S = PD$$
$$= 314 \times 100 = 31400$$

nach §. 59. a. Sphaer. $= \frac{DS}{6} = \frac{31400 \times 100}{6}$

$$= \frac{3140000}{6} = 523333\tfrac{1}{3}$$

also D^3 : Sphaer. $= 100000 : 523333\tfrac{1}{3}$

$\times 3$ $\quad = 3000000 : 1570000$

$\quad = 300 : 157$

Aber nicht ganz genau, weil auch das Verhältniß 100 : 314 nicht ganz genau ist.

a) Es verhalten sich daher zwo Kugeln A : a = wie die Würfel ihrer Durchmesser D und d oder

$$A : a = D^3 : d^3$$

denn $\quad A : D^3 = 157 : 300$

$\quad a : d^3 = 157 : 300$

folglich $\quad A : D^3 = a : d^3$

versetzt $\quad A : a = D^3 : d^3$

b) Aus diesem wird uns nun der Satz, daß die Linien nur ein einfaches, die Flächen und Oberflächen hingegen ein Quadratmaaß; die ganzen Körper aber gar ein kubisches Maaß haben, erst recht begreiflich. Eben dieses gilt von den Verhältnissen. Darum sagt man: Lineae habent rationem simplam: Superficies rationem quadratam, duplicatam: Soliditates rationem cubicam seu triplicatam. Z. B. in zween Zirkeln verhalten sich die Peripherien wie die Durchmesser; ihre Flächen aber, so wie auch die Oberflächen zwoer Kugeln, wie die Qua-

drate ihrer Durchmesser, die ganzen Kugeln selbst wie die Würfel der Durchmesser. S. I. Th. §. 121.

Anmerk. In der Physik und angewandten Mathematik wird von dieser Lehre vielfältiger Gebrauch gemacht. Vergleicht man nur zwo Peripherien mit einander: so nimmt man nur ihre ganzen oder halben Durchmesser. Z. B. Wenn man die Laufbahne des Mondes sucht, welcher in einer Entfernung von 60 Erdhalbmessern um die Erde gehet: so sagt man nur, wenn r den Halbmesser der Erde; R der Laufbahne des Mondes; p den größten Zirkel der Erde, und P die Peripherie der Mondeslaufbahne bedeuten:

$$r : R = p : P$$

und wenn man $r = 1$; $p = 5400^m$ setzt, so ist

$$1 : 60 = 5400 : x = 324000$$

Betrachtet man aber zwo Flächen z. B. die Oefnungen zwoer Röhren, um das herauslaufende Wasser zu berechnen: so muß man die Quadrate der Durchmesser in die Rechnung nehmen, und wenn die Quantität des Wassers aus zwoen verschiedenen Oefnungen Q und q: die Durchmesser der Oefnungen aber D, d sind: so setzt man

$$Q : q = D^2 : d^2$$

Den körperlichen Innhalt zu bekommen, müssen die Durchmesser kubirt werden. So werden bey mikroskopischen Beobachtungen aus dem nur einmal gefundenen Durchmesser die Vergrößerungen gefunden. Z. B. wenn der Durchmesser eines Thierchens durch das Vergrößerungsglas 10mal größer erscheint: so weis ich, daß die Vergrößerung nach dem körperlichen Innhalt $= 10^3 = 1000$ sey ꝛc.

Ueber diesen Abschnitt können Hrn. Hofr. Kästners Anfangsgr. und Anal. endl. Gr. Hr. geheimer Rath v. Segner, Hr. Hofr. Karsten und Prof. Klemm vorzüglich gelesen werden.

Zweytes Hauptstück.

Von der ebnen Trigonometrie.

I. Abschnitt.

Allgemeine Begriffe und Erklärungen der Trigonometrie.

§. 67.

Die ebene Trigonometrie ist eine Wissenschaft, welche aus drey gegebenen Theilen eines ebenen Dreyeckes, worunter wenigst eine Seite seyn muß, die drey übrigen zu finden lehret.

a) Aus drey Winkeln allein läßt sich, außer einer Proportion, nichts bestimmen, weil sie unendlichvielen ähnlichen Dreyecken eigen seyn können.

Anmerk. Zu der Erfindung der Trigonometrie hat die Astronomie, als in welcher sie ihren vorzüglichsten Nutzen hat, Anlaß gegeben. Wer aber der eigentliche Erfinder sey, ist nicht bekannt. Der erste, welcher davon schrieb, war Hipparchus. Er gab zwölf Bücher *de Triangulis* heraus, wovon aber keines mehr vorhanden ist. Aus diesem machte im zweyten Jahrhunderte nach Christi Geburt, also um etliche Jahrhunderte später, Ptolomeus im ersten Buche seines Almagesti einen Auszug, mit welchem man lange zufrieden war. Endlich fieng vor etwa 300 Jahren Johann Müller von Königsberg aus Sachsen (Regiomontanus) ein nürnbergischer Astronom an, die Trigonometrie auf's Neue zu bearbeiten, und brauchbarer zu machen. Er berechnete die Si-

nustafeln; und ob er gleich den Radius oder Sinus totus nur in 60 Tausendtheilchen annahm: so blieben doch diese Berechnungen noch immer schwer und mühesam. Die größte logarithmische Erfindung, sie mag nun von dem Neper, dem Byrge, oder von unserm Graf Herwart seyn. (S. I. Th. S. 177. Anmerk.) gab endlich dieser Wissenschaft die glücklichste Wendung. Allenthalben wurde sie mit neuem Eifer und Vortheile bearbeitet, und endlich zu den Grad der Vollkommenheit gebracht, in dem wir sie heut zu Tage bewundern. Unter den ersten Schriften werden bey uns die des *Pitisci* und *Ursini*; bey den Engelländern des Norwoods Trigonometrie genennt. Auch wird Jakobi Goodens *Trigonometria plana et sphaerica* als ein sehr gutes Kompendium gerühmt. Wolfs mathematischen Schriften, dessen Name ohne dieß bekannt genug ist, wird besonders in Rücksicht auf die Trigonometrie ausgestellt, daß er auch hier wie in andern Theilen der Mathematik die neüen Erfindungen meistens verschwiegen, und, ob er schon ihren Nutzen und Einfluß in andere Wissenschaften rühmt, sie dennoch sehr unvollständig und abgekürzt vorgetragen habe. S. Klemms mathem. Lehrb. §. 682. Die übrigen Männer, welche sich um die Wissenschaften verdient gemacht haben, sind bereits in dem ersten Theile schon öfter genennt worden, theils werden sie mit Gelegenheit der Materien angeführt werden, in welchen sie besonders vortreflich geschrieben haben.

§. 68.

Wenn man in einem Zirkel (Tab. V. Fig. II.) von dem Endpunkte eines Radius c d eine senkrechte Linie d b herabfällt: so heißt diese der Sinus des Winkels c, und des Bogens a d.

a) In einem jeden Winkel kann man die Schenkel als Stralen eines Zirkels ansehen (Tab. V. Fig. II.). Wenn man daher vom Endpunkte d des einen

nen Schenkels auf den andern Schenkel eine Perpendikulär ziehet: so ist diese der Sinus des Winkels c. **Ueberhaupt ist also der Sinus eine vom Endpunkte des Radius, oder einer Seite des Winkels, auf die andere Seite herabgefällte Perpendikulärlinie.**

b) Wird in der II. Fig. d b bis in g fort verlängert: so ist d g eine Sehne, wovon d b die Hälfte oder $= \frac{dg}{2}$ ist.

c) Und weil der Winkel d L g = c: also $db = \frac{dg}{2}$ auch der Sinus von d L g ist: (Tab. V. Fig. IV.) so hat jeder Winkel eines Dreyeckes, welches in einem Zirkel eingeschrieben ist, seine halbe Seite, als die halbe Sehne des Zirkels zu seinem Sinus. D. i. $\text{Sin. } L = \text{Sin } c = bd = \frac{dg}{2}$. Eben so ist $\text{Sin. } d = \frac{Lg}{2}$; $\text{Sin. } g = \frac{dL}{2}$.

d) Weil auf dem Punkte des Diameters L a (Tab. V. Fig. II.) keine andere Perpendikulär möglich ist als d b: so folgt daraus, daß d b auch der Sinus des Bogen L m d, und des Winkels L e d sey, und daß also die Nebenwinkel einerley Sinus haben. Wenn $bd = \text{Sin. } c = \text{Sin. } 60°$: so ist auch eben dieses $bd = \text{Sin. } Led$. Man heißt ihn auch den Komplements- oder Ergänzungswinkel zu 180°, weil er mit c 180° ausmacht $= \text{Sin. } 180° - 60° = \text{Sin. } 120°$.

e) Wenn man sich denkt: d b liege auf c a, und bewege sich nach und nach von a gegen m, und L zu: so ist der Sinus anfänglich bey a = o, dann wird er immer größer bis auf m, wo er selbst dem Radius gleich ist. Von m bis L nimmt er wieder eben so ab, wie er von a bis m gewachsen ist, und wird in L = Sin. 180° = o wieder = o. Von L oder von 180° an wird er negativ, weil er der Sinus des entgegengesetzten Scheitelwinkels ist. Dieser negative Sinus wächst bis 450°, nimmt dann wieder bis 360° ab. Will man die Peripherie, wie es erlaubt ist, verdoppeln: so fängt er jetzt an von 360° bis 360 + 90 = 450° wieder zu wachsen, dann wieder abzunehmen u. s. w.

f) Der Sinus des rechten Winkels gleichet daher dem Radius. Weil er der größte ist, heißt man ihn auch den Sinus totus, und sieht daher die übrigen Sinus als Theile oder eigentliche Brüche davon an, wovon der einzige Sinus von 30° rational, und $\frac{R}{2}$ gleich ist.

§. 69.

Wer sich den Sinus (man heißt ihn auch Sinus rectus) einmal wohl bekannt gemacht, wird nun die übrigen trigonometrischen Linien leicht kennen lernen.

1) Eine aus eben demselben Ende d des Radius (Tab. V. Fig. II.) c d auf den andern Radius

m

m c hinübergezogene senkrechte, heißt der Kosinus, oder Sinus der Ergänzung, d. i. des Winkels e, welcher das Komplement oder die Ergänzung von c zu 90° genannt wird, weil er mit c 90° ausmacht.

2) b a ist der Sinus versus oder Quersinus, i m der Kosinus versus.

3) a f oder eine an dem Ende des Strales, auf welchen der Sinus senkrecht ist, mit eben diesem Sinus gleichlaufende, und so lange fortgezogene, bis sie der verlängerte Stral c d in f schneidet, heißt Tangente (Tangens). c f die Sekante. Die mit dem Kosinus so parallellaufende m n die Kotangente (Cotangens), und c n die Kosekante (Cosecans).

a) Gleichwie der stumpfe Ergänzungswinkel L e d mit seinem spitzigen c eben denselben Sinus hat, also hat er mit ihm einerley Kosinus, Tangente und Kotangente.

b) Wenn, wie im vorgehenden §. gemeldet worden, der Sinus wächst: so wächst auch die Tangente, Sekante und der Quersinus. Der Kosinus, die Kotangente, Kosekante und Kosinus versus nehmen ab.

c) Unter 90°, das ist, wenn der Sinus = R ist, wird der Kosinus = 0. Ueber 90° wird er negativ. Bey 180°, wo der Sinus = 0 wird, ist er = R. Von daraus nimmt er wieder ab bis auf 180° + 90°, wo er das zweytemal = 0 wird. Dann fängt er an positiv zu werden bis auf 360° u. s. w.

d)

d) Vom Winkel e ist d i der Sinus, i m der Quersinus, m n die Tangente, c n die Sekante, also umgekehrt d b der Kosinus, b a der Kosinus versus, a f die Kotangente, c f die Kosekante.

§. 70.

Aus dem bekannten Sinus und Radius folget, daß

1) $\text{Cos.} = \sqrt{(1 - \text{Sin}^2)}$

2) $\text{Tang.} = \frac{R \times \text{Sin.}}{\text{Cos.}} = \frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}}$

3) $\text{Sec.} = \frac{R^2}{\text{Cos.}} = \frac{1}{\text{Cos.}}$

4) $\text{Cot.} = \frac{R^2}{\text{Tang.}} = \frac{1}{\text{Tang.}}$

5) $\text{Cosec.} = \frac{R^2}{\text{Sin.}} = \frac{1}{\text{Sin.}}$

Bew. des 1) Nach dem pythagorischen Lehrsatze ist

$$c d^2 = c b^2 + d b^2$$

oder $R^2 = \text{Cos}^2. + \text{Sin}^2.$

wenn $R = 1$ $\text{Cos.} = \sqrt{(1 - \text{Sin}^2.)}$

Bew. des 2) Weil das $\triangle c b d \sim \triangle c a f$, wegen dem gemeinschaftlichen Winkel c und den zweenen rechten bey b und a: so ist

$$c b : b d = c a : a f$$

d. i. $\text{Cos.} : \text{Sin.} = R : \text{Tang.}$

also $\text{Tang.} = \frac{R \times \text{Sin.}}{\text{Cos.}} = \frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}}$ wenn $R = 1$

Bew.

Bew. des 3) In eben den zweyen Dreyecken ist

$$cb : cd = ca : cf$$

oder $\text{Cos.} : R = R : \text{Sec.}$

$$\text{Sec.} = \frac{R^2}{\text{Cos.}} = \frac{1}{\text{Cos.}}$$

Bew. des 4) Es ist auch das $\triangle caf \backsim \triangle emn$: weil der Winkel $a = m$; der Winkel $n = c$ als Wechselwinkel: also ist wieder

$$af : ac = em : mn$$

D. i. $\text{Tang.} : R = R : \text{Cot.}$

Folgl. $\text{Cot.} = \frac{R^2}{\text{Tang.}} = \frac{1}{\text{Tang.}}$

Bew. des 5) In eben diesen Dreyecken ist

$$db : cd = me : en$$

oder $\text{Sin.} : R = R : \text{Cosec.}$

also $\text{Cosec.} = \frac{R^2}{\text{Sin.}} = \frac{1}{\text{Sin.}}$

a) Der Sinus versus und Kosinus versus lassen sich schon durch die Subtraktion bestimmen. So ist

$$\text{Sin. vers.} = R - \text{Cos.}$$
$$\text{Cos. vers.} = R - \text{Sin.}$$

b) Die Tangente des Bogens von 45° ist dem Radius gleich: denn wenn der Winkel $c = 45°$ ist: so ist auch, weil $a = 90°$

$$f = 180° - 90° - 45° = 45$$

Weil nun $c = 45$
$f = 45$

so

so ist auch $\underline{af = ac}$ (§. 14. d.)

D. i. Tang. $45° = R$.

c) Weil der Sinus des rechten Winkels $c + e$ oder von $90° = cm = R$: so läuft die Tangente af mit cm parallel. Die Sekante wird also selbst zum Radius cm, d. i. sie wird die Tangente, wie lange sie immer fortgezogen wird, nie schneiden, daher sagt man: die Sekante und Tangente des rechten Winkels oder von 90° sind unendlichgroß. Eben dieses ist von der Kotangente und Kosekante wahr. Es geschieht aber nur alsdann, wenn der Kosinus = 0 wird. D. i. in den vier Quadranten des Zirkels zweymal.

d) Da $\text{Cot.} = \frac{1}{\text{Tang.}}$: so folgte, daß die Kotangenten mit den Tangenten im vergekehrten Verhältniße stehen müssen.

Anmerk. Siehe hievon Klemms mathem. Lehrb., wo ein und anders etwas weitläuftiger abgehandelt wird. Ich will aus demselben nur folgende Ausdrücke der bisher vorgetragenen Begriffe anführen. Wenn p ein halber Zirkel, und der Radius = 1 ist: so wird

	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.
0 p	0	1	0	∞
½ p	1	0	∞	0
p	0	— 1	0	— ∞
$\frac{3}{2}$ p	1	0	— ∞	0
2 p	0	1	0	— ∞

II. Ab-

II. Abschnitt.

Allgemeine Grundsätze der trigonometrischen Rechnungen.

§. 71.

Die trigonometrischen Linien ähnlicher Bögen verhalten sich wie die Halbmesser.

Bew. Es seyen (Tab. V. Fig. III.) c b, C B die Sinus zweener ähnlicher Zirkelbögen c d, C D: so sind a b, A B die Kosinus, und dann wird offenbar wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke a b c und a B C

$$bc : BC = ac : aC$$

$$ab : aB = ac : aC$$

Weil dann a c und a C Stralen sind, verhalten sich die Sinus und Kosinus

$$bc : BC = r : R$$

$$ab : aB = r : R$$

Eben dieser Beweis kann von den übrigen trigonometrischen Linien gemacht werden. (Tab. V. Fig. IV.)

§. 72.

In einem jeden geradlinichten Dreyecke verhalten sich die Sinus der Winkel, wie die eben denselben Winkeln entgegengesetzten Seiten (Sinus angulorum sunt vt latera angulis opposita) oder (Tab. V. Fig. IV.)

$$\text{Sin. } L : \text{Sin. } d = dg : Ld$$

Bew.

Bew. Wenn auf einem jeden Dreyecke ein Zirkel beschrieben wird, so ist nach (§. 68. c.)

$$\text{Sin. } L = \frac{dg}{2}$$

$$\text{Sin. } d = \frac{Lg}{2}$$

also $$\text{Sin. } L : \text{Sin. } d = \frac{dg}{2} : \frac{Lg}{2}$$

$$= dg : Lg$$

folgl. $$\text{Sin. } L : \text{Sin. } d = dg : Lg$$

Da eben dieses von jedem andern Sinus wahr ist, so ist der Satz allgemein richtig.

Für die rechtwinklichten Dreyecke.

§. 73.

In jedem rechtwinklichten Dreyecke verhält sich der Radius zur Hypothenus, wie der Sinus eines jeden spitzigen Winkels zu seiner entgegengesetzten Seite oder (Tab. V. Fig. V.)

$$R : \text{hyp.} = \text{Sin. } a : bc$$

$$= \text{Sin. } c : ab.$$

Bew. Nach dem vorhergehenden §. ist

$$\text{Sin. } b : ac = \text{Sin. } a : bc$$

aber $$\text{Sin. } b = R \quad (§. 67. f.)$$

$$ac = \text{hyp.}$$

folgl. $$R : \text{hyp.} = \text{Sin. } a : bc$$

und so auch $$\text{Sin. } c : ab$$

§. 74.

§. 74.

In jedem rechtwinklichten Dreyecke verhält sich eine Seite zur andern, wie der Radius zur Tangente des an der ersten Seite liegenden spitzigen Winkels, d. i.

$$ab : bc = R : \text{Tang. } a$$
$$bc : ab = R : \text{Tang. } c$$

Bew. Offenbar ist $ab : bc = ab : bc$. Wenn man nun in a den Zirkel ansetzt, und mit ab einen Zirkelbogen bd beschreibt: so ist ab der Radius, und bc die Tangente des Winkels a, (§. 68. 3.) also ist auch

$$ab : bc = R : \text{Tang. } a$$

Eben so ist ab die Tangente des Winkels c, wenn man bc als den Radius ansieht: folglich ist auch

$$bc : ab = R : \text{Tang. } c.$$

Für die schiefwinklichte Dreyecke.

§. 75.

Wenn man aus einer Spitze a unter was immer für einem Winkel eine Linie ad herabziehet: (Tab. V. Fig. VI.) so verhalten sich die Sinus der beyderseits entstehenden Winkel o und r, wie die Abschnitte der Grundlinie mit den entsprechenden Seiten dividirt, oder

$$\text{Sin. } o : \text{Sin. } r = \frac{bd}{ab} : \frac{dc}{ac}.$$

Bew. Nach §. 71. ist

Sin.

	Sin. o : Sin. m = b d : a b
	Sin. n : Sin. r = a c : d c
(I. Th. 108. I.)	Sin. o × Sin. n : Sin. m × Sin. r = a c × b d : a b × d c
	Sin. n = Sin. m (§. 80. d.) also
: n u. m	Sin. o : Sin. r = a c × b d : a b × d c
: a b	$Sin. o : Sin. r = \frac{ac \times bd}{ab} : dc$
: a c	$Sin. o : Sin. r = \frac{bd}{ab} : \frac{dc}{ac}$.

§. 76.

Wird aber in einem gleichschenklichten Dreyecke L m n aus m auf L n eine senkrechte m p gefällt: (Tab. V. Fig. VII.) so wird nach (§. 18. c.) $Lp = pn = \frac{1}{2} b$, wenn wir die Grundlinie L n, b eine Seite L m oder m n aber a nennen: dann wird

1) $Sin.\ m = \frac{1}{2} b$

2) $Sin.\ \frac{1}{2} m = \frac{1}{2} \frac{br}{a} = \frac{br}{2a}$

3) $a = \frac{\frac{1}{2} rb}{Sin.\ \frac{1}{2} m} = \frac{br}{2\ Sin.\ \frac{1}{2} m}$

4) $\frac{1}{2} b = \frac{a \times Sin.\frac{1}{2} m}{r} = \frac{a \times Sin. m}{2r}$.

Der erste Satz ist schon aus §. 67. c. bekannt.

Bew. des 2) Es ist △ L p m ∽ △ m p n, und weil der Winkel m von m p in zween gleiche Theile getheilt

Thei-

wird: (§. 17. 1.) so ist jeder Winkel o, und u = $\frac{1}{2}$m, und daher

$$Lm : Lp = R . \text{Sin.} \tfrac{1}{2}m \quad (\S. 71.)$$

subst. $a : \frac{1}{2}b = r : \text{Sin.} \frac{1}{2}m$

also $\text{Sin.} \frac{1}{2}m = \frac{\frac{1}{2}br}{a} = \frac{br}{2a}$

Bew. des 3) $\text{Sin.} \frac{1}{2}m : Lp = r : Lm$

subst. $\text{Sin.} \frac{1}{2}m : \frac{1}{2}b = r : a$

also $a = \frac{\frac{1}{2}br}{\text{Sin.} \frac{1}{2}m} = \frac{br}{2\,\text{Sin.} \frac{1}{2}m}$.

Bew. des 4) $R : Lm = \text{Sin.} \frac{1}{2}m : Lp$

subst. $R : a = \text{Sin.} \frac{1}{2}m : \frac{1}{2}b$

folgl. $\frac{1}{2}b = \frac{a \times \text{Sin.} \frac{1}{2}m}{r} = \frac{a \times \text{Sin.} m}{2r}$

Anmerk. Diese drey Sätze empfehlen Kästner und Klemm auf eine vorzügliche Art. Sie dienen aus den Seiten die Winkel, oder aus den Winkeln die Seiten zu finden. Wenn der Radius = 1: so stehen sie also:

1) $\text{Sin.} \frac{1}{2}m = \frac{b}{2a}$ 2) $a = \frac{b}{2\,\text{Sin.} \frac{1}{2}m}$ 3) $\frac{1}{2}b = a \times \text{Sin.} \frac{1}{2}m$.

a) Die ganze Grundlinie eben dieses Dreyeckes gleichet dem Produkte einer Seite in den Sinus des ganzen Winkels m, durch den Kosinus vom $\frac{1}{2}$m dividirt. Oder

$$b = \frac{a \times \text{Sin.}\, m}{\text{Cos.} \frac{1}{2}m}$$

denn es ist $mp = \text{Sin.}\, n$ (§. 68. a.)

auch $= \text{Cos.} \frac{1}{2}m$

also

also $\text{Sin. } n = \text{Cos. } \frac{1}{2} m$

Nun ist $L n : L m = \text{Sin. } m : \text{Sin. } n$ (§. 71.)

subst. $b : a = \text{Sin. } m : \text{Cos. } \frac{1}{2} m$

also $b = \frac{a \times \text{Sin. } m}{\text{Cos. } \frac{1}{2} m}$.

b) Weil nach obiger Anmerk.

$\frac{1}{2} b = a \times \text{Sin. } \frac{1}{2} m$

so ist $\times 2$ $b = 2 a \times \text{Sin. } \frac{1}{2} m$

nach a) ist $b = \frac{a \times \text{Sin. } m}{\text{Cos. } \frac{1}{2} m}$

also $\frac{a \times \text{Sin. } m}{\text{Cos. } \frac{1}{2} m} = 2 a \times \text{Sin. } \frac{1}{2} m$

$: a$ $\frac{\text{Sin. } m}{\text{Cos. } \frac{1}{2} m} = 2 \text{Sin. } \frac{1}{2} m$

$\times \text{Cos. } \frac{1}{2} m$ $\text{Sin. } m = 2 \text{Sin. } \frac{1}{2} m \times \text{Cos. } \frac{1}{2} m$.

§. 77.

Das Quadrat vom Sinus des halben Winkels gleichet dem halben Produkte aus dem Radius in die Differenz des Radius und Kosinus. Denn L q, wenn man es auf m n senkrecht macht, ist der Sinus des ganzen Winkels m (§. 68) und m q sein Kosinus. Wenn man nun auch

I. L q als $\text{Sin. } m = P$
m q als $\text{Cos. } m = p$
L P als $\text{Sin. } \frac{1}{2} m = q$
$L m = r$ setzt:

so

so ist $q^2 = \frac{(r-p)r}{2}$.

Bew. Wenn man n m bis in R so verlängert, daß m r = m L werde, und also m p mit R L gleichlaufe: so werden nach (§. 51.) die von m p abgeschnittenen Stücke mit einander in Proportion stehen: folglich

$$Rm : mq = Ls : sq$$
$$Rm = Lm$$

also $Lm : mq = Ls : sq$

invert. $mq : Lm = sq : Ls$

add. $mq + Lm : Lm = sq + Ls : Ls$
$$sq + Ls = Lq$$

also $mq + Lm : Lm = Lq : Ls$

subst. II. $r + p : r = P : Ls = \frac{rP}{r+p}$

Nun ist auch $\triangle Lps \backsim \triangle Lqn$, weil der Winkel L beyden gemeinschaftlich, die bey p und q aber rechte sind: also ist auch

$$Lq : Ln = Lp : Ls$$

$Ln = 2Lp = 2q$ nach I. also

wieder subst. $P : 2q = q : Ls = \frac{2q^2}{P}$

nach II. ist auch $Ls = \frac{rP}{r+p}$

Folglich $\frac{2q^2}{P} = \frac{rP}{r+p}$

×P $2q^2 = \frac{rP^2}{r+p}$

:2 $q^2 = \frac{rP^2}{2(r+p)}$

Zähl. u. Nen. ×(r—p) $= \frac{rP^2(r-p}{2(r+p)(r-p}$

wirkl. multipl. $= \frac{rP^2(r-p)}{2(r^2-p^2)}$

aber nach §. 70. 1. $r^2 = p^2 + P^2$

also $r^2 - p^2 = P^2$

Folgl. P^2 subst. $q^2 = \frac{rP^2(r-p)}{2P^2}$

:P^2 $q^2 = \frac{r(r-p)}{2}$.

a) Es ist $r - p$ = Sin. verſ. (§. 70. a.)

also ist auch $q^2 = \frac{r \times \text{Sin. verſ.}}{2}$.

§. 78.

Nimmt man in zweyen gleichschenklichten Dreyecken von verschiedener Größe zween solche Winkel m: so ist das Produkt aus der Summe der Sinus ihrer halben Winkel in ihre Differenz, gleich dem halben Produkte des Strales in die Differenz ihrer Kosinus. Oder wenn wir den andern Winkel w, seinen Kosinus L; den Sinus von $\frac{1}{2}$ w aber d nennen: so ist der Satz

$$(\text{Sin.} \tfrac{1}{2} m + \text{Sin.} \tfrac{1}{2} w)(\text{Sin.} \tfrac{1}{2} m - \text{Sin.} \tfrac{1}{2} w) = \frac{r(\text{Coſ. } w - \text{Coſ. } m)}{2}.$$

Bew.

Bew. Es ist $$q^2 = \frac{r(r-p)}{2} \quad (§. 77.)$$

$$d^2 = \frac{r(r-L)}{2} \quad \text{(nach obigen Benennung.)}$$

subtr. $$q^2 - d^2 = \frac{r(r-p)}{2} - \frac{r(r-L)}{2}$$

wirkl. x $$= \frac{(r^2-rp)-(r^2-rL)}{2}$$

abgek. $$= \frac{rL-rp}{2} = \frac{r(L-p)}{2}$$

Nun ist $$q^2 - d^2 = \frac{r(\text{Cos. } w - \text{Cos. } m)}{2}$$

$$= (\text{Sin. } \tfrac{1}{2}m)^2 - (\text{Sin. } \tfrac{1}{2}w)^2$$

$$= (\text{Sin. } \tfrac{1}{2} m + \text{Sin. } \tfrac{1}{2} w)$$

$$\times (\text{Sin. } \tfrac{1}{2} m - \text{Sin. } \tfrac{1}{2} w)$$

also $$(\text{Sin. } \tfrac{1}{2} m + \text{Sin. } \tfrac{1}{2} w)(\text{Sin. } \tfrac{1}{2} m - \text{Sin. } \tfrac{1}{2} w) = \frac{r(\text{Cos. } w - \text{Cos. } m)}{2}.$$

a) Ist w kleiner als m: so ist Cos. $w >$ Cos. m (§. 69. b.). Es muß also allzeit der Kosinus des größern Winkels von dem des kleinern abgezogen werden, sonst würde die Differenz und also auch das Produkt negativ werden. In dem Beweise ist daher der Winkel $w < m$ angenommen.

Anmerk. Von den Lehrsätzen dieses und des vorhergehenden Paragraphs sagt Klemm §. 739. seines mathematischen Lehrbuches: Diese Lehrsätze sind ungemein fruchtbar, ungeachtet sie in den meisten mathematischen Handbüchern, besonders die nicht ganz neu sind, vermißt werden: aber eben deßwegen hat man sich genauer mit ihnen bekannt zu machen gesucht.

§. 79.

In einem jeden schiefwinklichten Dreyecke a b c (Tab. V. Fig. VIII.) verhält sich die größte Seite a c zu der Summe der zwo kleineren a b + b c, gleichwie die Differenz dieser zwo Seiten zu der Differenz der Segmenten der Grundlinie, welche die vom größten Winkel auf die entgegengesetzte Seite herabgefällte Perpendikulärlinie abschneidet, oder

$$ac : ab + bc = ab - bc : ae - ec.$$

Bew Wenn nach der kleinsten Seite b c ein Zirkel beschrieben, a b bis in g verlängert, dann b d gezogen, und aus b die senkrechte b e gefällt wird: so ist

$$ag = ab + bc$$
$$ap = ab - bc$$
$$ad = ae - ec.$$

Nun sind a c und a g Seiten eines Winkels außer der Peripherie, dessen Schenkel sich an der hohlen Peripherie enden, folglich (§. 55. c.) mit a p und a d reciproce proportional, d. i.

$$ac : ag = ap : ad.$$

Werden nun für a g, a p, a d ihre gleichgiltigen Werthe substituirt: so ist

$$ac : ab + bc = ab - bc : ae - ec.$$

§. 80.

In einem schiefwinklichten Dreyecke ist die Summe der zwo Seiten a b + b c (Tab. V. Fig. IX.)

zu

zu ihrer Differenz $bc - ab$; gleichwie die Tangente der halben Summe ihrer entgegengesetzten Winkel, zu der Tangente der halben Differenz derselben

$$ab + bc : bc - ab = \frac{T.\,e+r+o}{2} : \frac{T.\,e+r-o}{2}.$$

Bew. Wenn wir wiederum mit ab einen Zirkel beschreiben; bc bis in x verlängern; aus x die Linie xaf herabziehen; endlich ad, und mit dieser die gleichlaufende fc beschrieben: so ist 1)

$$xc = bc + ab = \text{Summae Laterum}$$
$$dc = bc - ab = \text{Differentiae Laterum.}$$
$$e+r+o = \text{Summae Angulorum.}$$
$$e+r-o = \text{Differentiae Angulor.}$$

Nun ist aber 2)

$$o+s = \frac{e+r+o}{2}$$

Denn $e+n = e+r+o$

Weil $e = n$ (§. 14. d.) folglich $e+n = 2n$, ist

$$2n = e+r+o$$
$$n = \frac{e+r+o}{2} \text{ Semis. Ang.}$$

Wiederum ist 3)

$$n = o+s$$

also $o+s = \dfrac{e+r+o}{2}$

$$s = \frac{e+r-o}{2} \text{ Semidiffer. Angul.}$$

Denn weil $o+s = \dfrac{e+r+o}{2}$ ist

ist $2o+2s=e+r+o$

und $s=\frac{e+r+o-2o}{2}=\frac{e+r-o}{2}$.

4) Wenn nun $cf=R$, ist xf die Tangente von $o+s=\frac{e+r+o}{2}$; af die Tangente von $s=\frac{e+r-o}{2}$

Es ist aber nach (§. 49. 1.)

$$xc:dc=xf:af.$$

Subst. $ab+bc:bc-ab=T.\frac{e+r+o}{2}:T.\frac{e+r-o}{2}$.

Anmerk. Dieses soll uns nun für die künftigen Auflösungen der trigonometrischen Aufgaben genug seyn. Ein mehreres kann in dem schon oft genannten Klemms mathematischen Lehrbuche, dann dessen Lehrbegriffe aller mathematischen Wissenschaften, in Belidors Grundriße der mathematischen Wissenschaften, Tobias Mayrs praktischen Geometrie, Herrn von Segners Anfangsgründen der Geometrie nachgeholt werden.

III. Ab=

III. Abschnitt.

Trigonometrische Berechnungen.

Von den Logarithmen.

§. 81.

Wenn dem Halbmesser eine gewiße Menge gleicher Theile gegeben wird: so läßt sich daraus nach (§. 73. Anm.) das Maaß für jede der vorgenannten trigonometrischen Linien auf jeden Winkel in eben denselben Theilen angeben.

Anmerk. So setzte man den Halbmesser 1000000000, dessen Logarithme = 10, und fand sowohl die Sinus, Tangenten und Sekanten (die letzten werden heute zu Tage als unnöthig weggelassen) als auch ihre Logarithmen. Neper gab die Logarithmen für alle Grade und Minuten an: und verfaßte also die gewöhnlichen Tafeln der Logarithmen der Sinus und Tangenten. Beniamin Ursin und Adrian Vlakq haben sie auch von 10 zu 10 Sekunden berechnet. In der *Trigonometria britanica*, welche Brigg angefangen, und Heinrich Gellibrand nach dem Tode vollendet hat, sind die Logarithmen für die Hunderttheile der Grade gesucht worden. Man sehe hierüber in Kästners Anfangsgr. 2. Satz der ebenen Trigonometrie.

Anmerk. Auf Verlangen meiner Zuhörer und Bequemlichkeit wegen, die man hat, wenn die Logarithmen gleich bey dem Lehrbuche stehen, habe ich sie sowohl für die Sinus und Tangenten, als für die natürliche Zahlen aus Vlakq und Schulze nachdrucken lassen. Doch die für die natürliche Zahlen nur bis auf 1000: weil ich bey wichtigen Rechnungen durchgehends Schulzens Tafeln empfohlen habe. Zur Uebung aber, und in kleinern Rechnungen auch diese gute Dienste leisten.

Ueb-

Uebrigens habe ich über die Einrichtung der Tafeln hier weiter nichts zu sagen. Daß die Bögen unter 45°, und ihre Ergänzung zu 90° jederzeit beysammenstehen, und also die ersten und letzten Grade vorne, die mittlern aber zuletzt gesucht werden müßen, wird man von selbst sehen können. Die Art aber, mit den Logarithmen zu rechnen, ist schon im I. Theil §. 137. u. ff. gelehrt worden. Es werden daher nur folgende zwo Aufgaben fehlen.

§. 82.

1te Aufg. Einem gegebenen Winkel z. B. 36° 17′ 24″ den Logarithme seines Sinus oder Tangente zu finden.

Aufl. Nach (§. 140. I. Th.) sucht man in den Tafeln den Log. von 36° 17′ dann auch den Log. des nächstgrößern Sinus, oder von 36° 18′; ziehet von diesem jenen ab; sucht dann zu 1′ oder 60″ den gegebenen 24″, und der gefundenen Differenz der Logarithme die vierte Proportionalgröße: wird diese dem Log. Sin. 36° 17′ addirt: so hat man den Log. Sin. 36° 17′ 24″. Die Auflösung stehet so:

$$\text{Log. } 36^\circ\ 18' = 9{,}7723314$$
$$\text{Log. } 36^\circ\ 17' = 9{,}7721593$$
$$\text{Diff.} \qquad 1721$$
$$60'' : 24'' = 1721 : x$$
$$x = \frac{1721 \times 24}{60} = 688$$
$$\text{also Log. } 36^\circ\ 17^\circ\ 24'' = 9{,}7721593 + 688$$
$$= 9{,}7722281$$

§. 83.

§. 83.

2te Aufg. Den Winkel für den Logarithme eines Sinus $= 9,4602412$ suchen.

Aufl. Diesem Logar. entspricht der Winkel von $16^\circ\ 46'$ und etwas darüber, welches also Sekunden seyn müssen. Um nun auch diese zu finden, nimmt man den nächstgrößern und nächstkleinern Logarithme, ziehet den nächstkleinern von dem nächstgrößern, und von dem gegebenen ab: sucht dann von der ersten Differenz zu der 2ten Differenz, und zu $60''$ die vierte Proportionalgröße, welche die Zahl der Sekunden seyn wird. Die Auflösung wird so stehen:

$$L\ 16^\circ\ 47' = 9,4605270$$
$$L\ 16^\circ\ 45' = 9,4596884$$

Diff. 8386

$$L\ 16^\circ\ 46' = 9,4601079$$
$$L\ 16^\circ\ 45' = 9,4596884$$

Diff. 4195

$$8386 : 4195 = 60'' : x$$
$$x = \frac{4195 \times 60''}{8386} = 30''$$

also der Winkel des

$$L\ 9,4602412 = 16^\circ\ 46'\ 30''$$

Anmerk. Daß sowohl in diesem als in dem vorigen Verfahren die kleinen Brüche weggelassen sind, nnd daß also das gefundene nur beynahe wahr seyn könne, braucht nicht mehr angemerkt zu werden. Uebrigens sieht man, daß der Unterschied dieser Verfahrungsarten von denen §. 140. I. Th. angezeigten nur darinn liege, daß man hier 1' oder 60'' anstatt 1000 oder 1 als ein Glied der Proportion annehmen müsse, weil

näm-

nämlich Theile der Grade oder Sekunden, und nicht nur natürliche Zahlen gesucht werden.

Aufgaben für die rechtwinklichten Dreyecke.

§. 84.

1te Aufg. Aus der Hypothenuse und einer Seite a b eines rechtwinklichten Dreyeckes a b c die schiefen Winkel finden. (Tab. V. Fig. V.)

Aufl. Nach §. 73. ist Hyp. a c : R = a b : Sin. c.

Es sey Hyp. = 5′; a b = 4′: so ist in Logarithmen

$$0,6989700 : 0,6020600 = 10,0000000 : x$$

$$x = 0,6020600 + 10,0000000 - 0,6989700$$
$$= 10,6020600 - 0,6989700 = 9,9030900$$
$$= \text{Sin. } 53^\circ\ 7' = \text{Sin. c.}$$

Wird nun der Winkel c von 90 abgezogen: so giebt 90 — 53° 7, = 36° 53′: aber etwas größer als der Winkel a. Weil man die Winkel selten genau findet, wie sie in den Tafeln stehen: so muß man erst aus den Umständen ersehen, wie genau man sie suchen müsse. Es ist daher zu genauern Bestimmungen vortheilhafter, Linien aus Linien ohne Winkel zu suchen; obschon die Rechnung zuweilen beschwerlicher wird.

§. 85.

2te Aufg. Aus dem Winkel a und der Seite a b die Hypothenuse oder Sekante a c finden.

Aufl. Vor allen muß der Winkel c gesucht werden: es ist aber dieser = 90 — a. Dann setzt man nach (§. 73.)

$$\text{Sin. } c : a\,b = R : \text{hyp.}$$

Gesetzt nun a sey = 50° 3′: so ist c = 90° — 50° 3′ = 39° 57′; a b = 36′: also ist in Logarithmen

$$9,8076154 : 1,5563025 = 10,0000000 : x$$
$$x = 1,5563025 + 10,0000000 - 9,8076154$$
$$= 11,5563025 - 9,8076154$$
$$= 1,7486871 = \text{Log. } 56'.$$

§. 86.

3te Aufg. Aus dem gegebenen Winkel a, und der Hypothenuse a c die Seite b c finden.

Aufl. $R : \text{Hyp. } a\,c = \text{Sin. } a : b\,c$

Wenn a c = 60′; der Winkel a = 39° 57′: so ist

$$10,0000000 : 1,7781513 = 9,8076154 : x$$
$$x = 1,7781513 + 9,8076154 - 10,0000000$$
$$= 11,5857667 - 10,0000000$$
$$= 1,5857667 = L\ 34'.$$

Anmerk. Diese gefundene Länge = 616‴ = 6′ 1″ 4‴ ist nur beynahe wahr, und unter der Kennziffer 2 genommen worden. Auf der Erde kann dieß freylich wohl erklecklich seyn: aber bey himmlischen Abmessungen müßte man sich freylich größerer Tafeln bedienen.

§. 87.

4te Aufg. Aus der Seite a b, b c den Winkel a finden.

Aufl.

Aufl. $ab : bc = R : \text{Tang. } a$.

Setzt man wieder $ab = 30°$; $bc = 4°$: so ist

$0,4771213 : 0,6020600 = 10,0000000 : x$

$$x = 0,6020600 + 10,0000000 - 0,4771213$$
$$= 10,6020600 - 0,4771213$$
$$= 10,1249387 = \text{Tang. } 53° \, 8'$$

a) Der Winkel c ist $90 - a$ gleich: soll er aber ohne a gefunden werden: so setzt man

$$L\,4 : L\,3 = R : \text{Tang. } c.$$

So ist $\text{Tang. } c = R + L\,3 - L\,4.$

Anmerk. Um sich in diesen so wichtigen Aufgaben recht üben zu können, will ich folgende Tabelle hier anfügen. Sie enthält alle vorkommende Fälle der rechtwinklichten Dreyecke. Eine weitere Erklärung derselben wird eben nicht nöthig seyn.

Dat.	Petit.	Proportio.
a b	a	a b : b c = R : Tang. a
	a c	Sin. a : b c = R : a c
b c	c	a c : R = a b : Sin. c.
a b	c	a c : R = a b : Sin. c
	a	= 90 — c
a c	b c	R . a c = Sin. a : b c
b c	a	a c : R = b c : Sin. a
	c	= 90 — a
a c	a b	R : a c = Sin. c : a b.
a b	c	= 90 — a
	b c	Sin. c c : a b = Sin. a : b c
a	a c	Sin. c : a b = R : a c.
a c	c	= 90 — a
	a b	R : Hyp. = Sin. c : a b
a	b c	R : Hyp. = Sin. a : b c

Auf=

Aufgaben für die schiefwinklichten Drenecke.

§. 88.

1te Aufg. Aus zwoen Seiten ab = 49; bc = 36, und dem Winkel a = 35° 7′ die übrigen Winkel zu finden. (Tab. V. Fig. X.)

Aufl. bc : Sin. a = ab : Sin. c. In Logarithmen

$$1,5563025 : 9,7598515 = 1,6901961 : x$$

$$x = 9,7598515 + 1,6901961 - 1,55630$$

$$= 11,4500476 - 1,5563025$$

$$= 9,8937451 = \text{L. Sin. } 51° 32′$$

Dieser Logarithme ist nur in der letzten Ziffer von dem Log. Sin. 51° 32′ unterschieden, und also in Minuten sehr genau. Man kann ihn aber auch in Sekunden oder Tertien finden. S. Kästners Anfangsgründe trigon. 12. Satz.

a) Wenn der gefundene Logarithme dem Sinus eines stumpfen Winkels zugehörte: (§. 68. d.) so gäbe er 128° 28′.

§. 89.

2te Aufg. Aus dem Winkel a = 51° 30′; dem Winkel c = 60°; der Seite bc = 20′ die Seite ab finden.

Aufl.

Aufl.

$$\text{Sin. } a : b\,c = \text{Sin. } c : a\,b$$

$$9,8935444 : 1,3010300 = 9,9375306 : x$$

$$x = 1,3010300 + 9,9375306 - 9,8435444$$

$$= 11,2385606 - 9,8935444$$

$$= 1,3450162 = \text{Log. } a\,b = L\,22'.$$

§. 90.

3te Aufg. In einem stumpfwinklichten Dreyecke a b c (Tab. V. Fig. XI.) ist der Winkel b = 30°; der Winkel c = 122° 30′, die Seite a c = 17′: man soll a b finden.

Aufl. Weil der Winkel von 122° 30′ nicht in den Tafeln stehet: so nimmt man anstatt dessen den Kosinus oder Sinus des Ergänzungswinkels, welcher = 180° — 122° 30′ = 57° 30′ und setzt

$$\text{Sin. } 30° : 17' = \text{Sin. } 57° 30' : x$$

D. i. $9,6989700 : 1,2304489 = 9,9260292 : x$

$$x = 1,2304489 + 9,9260292 - 9,6989700$$

$$= 11,1564781 - 9,6989700$$

$$= 1,4575081 = L\,a\,b = L\,28.$$

§. 91.

4te Aufg. In eben diesem Dreyecke ist a b = 28′, b c = 16′, der Winkel a = 28′ 4′ gegeben. Man sucht den Winkel c.

Aufl.

Aufl.

$$bc : \text{Sin.}\, a = ab : \text{Sin.}\, c.'$$

$$1{,}2041200 : 9{,}6725583 = 1{,}4471580 : x$$

$$x = 9{,}6725583 + 1{,}4471580 - 1{,}2041200$$

$$= 11{,}1197163 - 1{,}2041200$$

$$= 9{,}9155963 = \text{Log. Sin.}\, 55^\circ\, 25'$$

Weil aber dieses einem stumpfen Ergänzungswinkel zugehöret: so muß man $55^\circ\, 25'$ von 180° abziehen; dann ist $180^\circ - 55^\circ\, 25' = 179^\circ\, 60' - 55^\circ\, 25' = 124^\circ\, 35'$ das Maaß des stumpfen Winkels c.

§. 92.

5te Aufg. In einem jeden schiefwinklichten Dreyecke a b c (Tab. V. Fig. XII.) aus den gegebenen Seiten $ab = 7$; $bc = 9$; $ac = 1$ die drey Winkel finden.

Aufl. Man lasse von b auf a c eine Perpendikulär herab: so ist nach (§.)

$$ac : ab + bc = bc - ab : ec - ae$$

also $\quad 11 : 7 + 9 = 9 - 7 : x$

oder $\quad 11 : 16 \quad = 2 : x = \frac{32}{11}$

also $\quad ec - ae = \frac{32}{11}$

Wenn $\quad ec + ae = 11.$

Da wir nun aus dem I. Theile (§. 28. a.) wissen, aus gegebener Summe und Differenz zwoer Größen die Größen selbst zu finden: so sind wir jetzt im Stande auch a e, und e c zu bestimmen. Es sey also

a e

$$ae = x$$

so wird $ec = x + \frac{32}{11}$

$$ae + ec = 2x + \frac{32}{11}$$

auch ist $ae + ec = 11$

Folglich $2x + \frac{32}{11} = 11$

$\times 11$ $22x + 32 = 121$

-32 $22x = 121 - 32 = 89$

$:22$ $x = \frac{89}{22}$

Also ist das Stück $ae = \frac{89}{22}$:

das Stück ec aber $= \frac{89}{22} + \frac{32}{11} = \frac{89}{22} + \frac{64}{22} = \frac{153}{22}$.

Nun setzt man

$$L\,7 : L\,R = L\,89 - L\,22 : L\,\text{Sin.}\,n$$

$$0,8450980 : 10,000000 = 0,6069673 : x$$

$$x = 10,000000 + 0,6069673 - 0,8450980$$

$$= 10,6069673 - 0,8450980$$

$$= 9,7618693 = \text{Sin.}\,35°\,18'.$$

Eben so ist $L\,9 : L\,R = L\,153 - L\,22 : L\,\text{Sin.}\,m$

$$0,9542425 : 10,000000 = 0,8422687 : x$$

$$x = 10,000000 + 0,8422687 - 0,9542425$$

$$= 10,8422687 - 0,9542425$$

$$= 9,8880262 = L\,\text{Sin.}\,50°\,36'.$$

Da nun $n + m$ = dem ganzen stumpfen Winkel b: so ist $35°\,18' + 54°\,42' = 85°\,54'$ eben dieser Winkel b. Ist einmal der Winkel b gefunden: so schließt man

$$ac : \text{Sin.}\,b = ab : \text{Sin.}\,c$$

so

so hat man den Winkel c. Der Winkel a ist $= 180 - b - c$: oder man kann wieder setzen:

$$ac : \text{Sin.}\, b = bc : \text{Sin.}\, a.$$

§. 93.

6te Aufg. Aus zwoen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines schiefwinklichten Dreyeckes die übrigen zween Winkel finden. Z. B. ab sey $= 30'$; $bc = 50'$, der Winkel $b = 100°$.

Aufl. Nach (§. 80.) ist

$$bc + ab : bc - ab = \text{Tang.} \frac{a+c}{2} : \text{Tang.} \frac{a-c}{2}$$

$$\text{also } 50 + 30 : 50 - 30 = \text{Tang.} \frac{50+30}{2} : x$$

$$80 : 20 = \text{Tang.} \frac{80}{2} : x$$

$$1{,}9030900 : 1{,}3010300 = 9{,}9238135 : x$$

$$x = 1{,}3010300 + 9{,}9238135 - 1{,}9030900$$
$$= 11{,}2248435 - 1{,}9030900 = 9{,}3227530$$
$$= \text{L Tang. } 11° \, 52' = \text{Semidiffer. Angul.}$$

$23° \, 44'$ ist also die ganze Differenz; die Summe der zween Winkel $= 80°$; und wenn wir nun den Winkel $c = x$ nennen, so ist

$$a = x + 23° \, 44'$$
$$a + c = 2x + 23° \, 44'$$
$$a + c = 80°$$

$$\text{also} \quad 2x + 23° \, 44' = 80°$$

$$x = \frac{80° - 23° \, 44'}{2} = 28° \, 8' = c$$

$$x + 23° \, 44' = 28' \, 8' + 23° \, 44' = 51° \, 52' = a.$$

Für die Polygone.

§. 94.

1te Aufg. Die Seite eines ordentlichen Polygons finden.

Aufl. Weil die Seite a b eines ordentlichen Vieleckes (Tab. III. Fig. IV.) die Grundlinie b eines gleichschenklichten Dreyeckes ist, und nach (§. 76. 4.)

$$\tfrac{1}{2}\,b = \frac{a\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,m}{R}$$

so ist

$$b = \frac{2\,a\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,m}{R}$$

wo a den Halbmesser des Vieleckes, e den Halbmesser der Tafeln bedeutet, und der Winkel m = c ist.

a) Wenn man $m = 40°$: also $\tfrac{1}{2}m = 20°$; den Halbmesser $a = r =$ dem Halbmesser der Tafeln setzt: so ist $2\,a\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,m = 6840404 = b$: und wenn $R = 1000$: so würde $b = 684$ die Seite eines Neuneckes geben. Wäre aber $a = 7'$ gegeben: so wäre

$$b = \tfrac{7'}{10'}\,\tfrac{6840404}{000000} = 4{,}7882828$$

b) Durch die Uebersetzung läßt sich nun auch der Halbmesser des Vieleckes finden: denn weil

$$b = \frac{2\,a\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,m}{R}$$

so ist

$$a = \frac{b\,R}{\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,m}$$

§. 95.

2te Aufg. Den Innhalt eines ordentlichen Vielecks finden.

Aufl. Es sey (Tab. III. Fig. IV.) die Perpendikulär $ce = e$; $ac = a$; $ab = b$; so ist der Innhalt des Dreyeckes abc, oder

$$\triangle = \frac{eb}{2} \quad (\text{§. 36. c.})$$

Des Polygons, wenn die Zahl der Seiten $= n$

$$\text{Polyg.} = \frac{ebn}{2} \quad (\text{§. 39.})$$

Wenn nun nach §. 76. der Winkel $c = m$; so ist im $\triangle aec$

$$R : a = \text{Sin. } r : e$$

$$= \text{Cos. } \tfrac{1}{2} m : e \quad (\text{weil Sin. } r = \text{Cos. } \tfrac{1}{2} m)$$

also $$e = \frac{a \times \text{Cos. } \frac{1}{2} m}{R}$$

$\times b$ (§. 49. a.) $$eb = \frac{2a^2 \times \text{Sin. } \frac{1}{2} m \times \text{Cos. } \frac{1}{2} m}{R^2}.$$

$$\text{Sin. } m = 2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} m \times \text{Cos. } \tfrac{1}{2} m$$ { : R, welch. hier (§. 76 4 u. b) = 1 ges. worden.

$$= \frac{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} m \times \text{Cos. } \frac{1}{2} m}{R}$$

also $$eb = \frac{a^2 \times \text{Sin. } m}{R}$$

$: 2$ $$\frac{eb}{2} = \frac{a^2 \times \text{Sin. } m}{2R}$$

wenn $a=R \qquad = \frac{R \times Sin.m}{2} = \triangle$

$\times n \qquad \frac{ebn}{2} = \frac{R \times Sin.m \times n}{2} = Polyg.$

a) In zweyerley Polygonen P, p, wenn alles mit großen und kleinen Buchstaben unterschieden wird, den Halbmesser ausgenommen: ist

$$P:p = \frac{NR\,Sin.M}{2} : \frac{nr \times Sin.m}{2}$$

$$= NR\,Sin.M : nr \times Sin.m.$$

Anmerk. Man kann auf diese Art durch die Trigonometrie die Vielecke weit genauer berechnen, als es durch die Geometrie zu geschehen pflegt. S. die schon öfters genannten Klemm und Kästner. Erster zeigt auch §. 770. seines mathem. Lehrbuches die Art an, aus einem einzigen Sinus alle Sinus und Kosinus zu bestimmen.

Drittes Hauptstück.

Von den krummen Linien.

I. Abschnitt.

Von den krummen Linien und den Kegelschnitten überhaupt.

§. 96.

Wenn eine Linie P M (Tab. VI. Fig. I. und II.) in a unendlichklein ist, dann aber gegen P, p, b herabbewegt wird, ohne ihre Parallellage zu verändern, und in dieser Bewegung gegen M, m, c immer um ganz kleine Theile oder Differentiale zunimmt: so werden

1) Nicht nur die Linien P M, p m, a c, sondern auch a P, a p, a b immerzu verändert und größer werden, obschon nicht allemal in eben demselben Verhältniße. Man nennt sie deßwegen veränderliche Größen: jene Ordinaten; diese aber Abscissen: und drückt die ersten durch y; diese aber durch x aus, wie uns schon bekannt ist.

2) Die zugewachsenen Endpunkte a M m c werden eine Linie zurücklassen, welche gerade wie Fig. I. oder krumm, wie Fig. II. seyn wird, nachdem nämlich die Ordinate y gegen der Abscisse x gewachsen ist.

a) Alle Abscissen liegen daher in einer geraden Linie, und ihr Anfang muß nicht eben in der Scheitel (so heißt man den obersten oder Anfangspunkte) seyn: er kann auch von einem andern Punkte inn- oder außerhalb der Scheitel genommen werden. Die ganze Abscissenlinie wird insgemein der Durchmesser, und wenn er die Ordinaten senkrecht durchschneidet, die Achse genennt, deren oberste Punkt a eigentlich die Scheitel einer krummen Linie ist.

b) Da P M in ihrer Bewegung abwärts immer parallel angenommen wird: so sind alle Ordinate einer Linie einander gleichlaufend.

c) Lassen wir P M, P M auf den beyden Seiten der Abscissenlinie a b nach einem und eben demselben Gesetze wachsen (Fig. II.), so nämlich, daß immer P M = P M, p m = p m ꝛc. bleibe: so werden die Endpunkte der Ordinaten M m, M m ꝛc. zwo Linien oder zween Arme einer Linie erzeugen. Man nennt daher auch P M, p m auch nur halbe Ordinaten, und sagt: einer Abscisse gehören zwo halbe Ordinaten zu. Z. B. der Abscisse a P gehört die Ordinate P M, und P M, der Abscisse a p aber p m und p m ꝛc.

Anmerk. Bey jenen krummen Linien, deren Krümmung beyderseits gleich ist, werden nur die halbe Ordinaten (ich werde sie in der Folge nur gleich Ordinaten nennen) in die Rechnung genommen, weil das, was von den halben einmal bewiesen ist, auch von ganzen wahr ist.

§. 97.

§. 97.

Die ganze Beschaffenheit der Linie a M m c, ihre Lage, Länge, gerade oder krumme Bildung hängt also von der Beschaffenheit der Ordinaten und Abscissen ab: und wird aus der Vergleichung derselben gegen einander bestimmt.

Da aber die Abscissen und Ordinaten allein insgemein nur ein Verhältniß geben: so nimmt man noch eine dritte beständige Größe dazu, um eine Gleichung zu bekommen. Man heißt diese Größe den **Parameter**, und wir wollen ihn durch a ausdrücken.

a) So ist nach §. 52. Anmerk. $y^2 = ax - x^2$ die Gleichung des Zirkels, dessen Parameter selbst der Durchmesser ist.

b) Ist die von den zugewachsenen Endpunkten der Ordinate P M erzeugte a M m c eine gerade Linie (Fig. II.) und $aP = x$, $PM = y$, $ab = d$, $bc = e$: so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke a P M und a b c,

$$aP : PM = ab : bc$$

oder

$$x : y = d : e$$

und

$$y = \frac{ex}{d}$$

die Gleichung einer geraden Linie. Setzt man die beständige Größe, oder den Quotienten $\frac{e}{d} = a$: so wäre die Gleichung der geraden Linie $y = ax$.

c)

c) Auf eine ähnliche Art werden die krummen Linien durch Gleichungen ausgedrückt: und daher alle krumme Linien aus geraden bestimmt.

d) Der Parameter muß nicht eben eine einfache Größe seyn: er kann ein Produkt oder Quotient aus mehrern seyn.

§. 98.

1) Wenn sowohl die Ordinaten als die Abscissen einer krummen Linie immerfort größer werden, wie Fig. II. so ist die Linie a M m c keine in sich selbst zurückkehrende Linie. Ihre Schenkel (rami) gehen vielmehr immer weiter auseinander.

2) Wachsen aber die Ordinaten nur bis auf einen gewissen Punkt z. B. bis in e (Tab. VI. Fig. III.) und nehmen dann ab, so daß sie endlich bey c gar verschwinden, und selbst zur krummen Linie werden, obschon die Abscisse a P, a p, a e, a o immer zunehmen: so ist die Linie a M m b n N c eine in sich selbst zurückkehrende, d. i. da einer jeden Abscisse zwo Ordinaten, diesseits und jenseits nämlich respondiren, (§. 96. c.) so wird die ganze Linie a b c d a seyn.

3) Wenn man daher in der Gleichung einer krummen Linie $y = o$ setzt, und dann noch einen Werth für x finden kann: so ist die Linie dieser Gleichung eine in sich selbst zurückkehrende. Z. B.

weil

weil $y^2 = ax - x^2$
$y = 0$ $0 = ax - x^2$
$+ x^2$ $x^2 = ax$
$: x$ $x = a$

Der Zirkel also, dessen Gleichung $y^2 = ax - x^2$ ist, ist nach diesem Verfahren eine in sich selbst zurückkehrende. Aber die Parabel ist es nicht: denn wenn man in $y^2 = ax$, $y = 0$ setzt, ist $ax = 0$: also keine positive Abscisse mehr möglich.

§. 99.

1) Wenn man die Achse a P R einer krummen Linie (Tab. VI. Fig. IV.) so lange fortführt, bis sie die Tangente T t erreiche, dann aus dem Berührungspunkte M eine Ordinate P M, und auf eben diesen Punkte M der Tangente T t eine senkrechte ziehet: so heißt T P die Subtangente; M R die Normal; P R die Subnormallinie.

2) Beschreibt man mit der Zirkelöfnung R M = der Normallinie aus R einen Zirkel M o q: so wird dieser der berührende Zirkel (Circulus osculator) sein Stral aber der Stral der Krümmung (radius curuaturae) genannt.

Anmerk. Diese Vorbereitung und Begriffe werden nun schon erklecklich seyn, um uns den krummen Linien mehr zu nähern. Einige dem Scheine nach fehlende Erklärungen werden bequemer gelegenheitlich angeführt werden, wo sie mehr hinpassen, und das Gedächtniß minder beschweren. Nun etwas von der Geschichte.

Da die Geometrie der menschlichen Gesellschaft äußerst nothwendig und nützlich war: so hält zwar *de la Chapelle* in seiner Abhandlung von den Kegelschnitten dafür, daß sie unter die ersten und ältesten Erfinduugen gezählt werden müsse. Aber die Lehre der krummen Linien, glaubt er, habe weder gleichen Ursprung, noch gleiches Alter. Nur einige scharf und tief forschende Geister konnten an so weit hergeholten Entdeckungen ein Interesse finden, konnten die Entdeckuugen wirklich machen, ob sie schon auch in der Folge von so vielem Nutzen waren, als heut zu Tage die Erfahrung zeigt.

Der erste, welcher die krummen Linien untersucht hat, ist ganz unbekannt. Alt muß doch die Lehre schon seyn, indem Archimedes schon vor 2000 Jahren in seinen Schriften von den Kegelschnitten als einer seinen Vorgängern bekannten Sache Meldung gethan hat. Es glaubten zwar die Alten, man müßte zur Parabel einen rechtwinklichten, zur Elypse einen spitzwinklichten, zur Hyperbl einen stumpfwinklichten Kegel haben. Aber Apolonius zu Pergen einer Stadt in Pamphilien gebohren zur Zeit des Königs Ptolomäus Evergetes, ungefähr 247 Jahre vor Christi Geburt zeigte, daß man aus einem jeden Kegel alle drey Seiten erhalten könne. Dieser Apollonius war einer der stärksten Nachfolger des Euklides zu Alexandria, und Kardanus räumt ihm die siebente Stelle unter den subtillsten Köpfen ein, die jemals die Welt gesehen hat. Von den Kegelschnitten hat er acht Bücher herausgegeben, worinn er alles gesammelt, was **Aristäus**, **Eudoxus**, **Menechmus**, **Euklides**, **Kanon** und **Archimedes** vor ihm gelehrt haben. Diese Werke sind so allgemein und abstrakt geschrieben, daß **Kepler** *in introd. de stella Martis* sagt: quotusquisque Mathematicorum est, qui tolerat laborem perlegendi Apolonii pergaei conica. Unter den Alten haben **Eutrodius**, welcher unter dem Kaiser Justinian berühmt war, **Smidas**, und nach diesem *Hypatia*, die Tochter des Theons, die beßten Kommentarien über die Schriften des Apollonius verfaßt. Als hernach im sechsten Jahrhunderte die Wissenschaften ihren Zug zu den Arabern nahmen, wurden sie in diese Sprache übersetzt. Da aber die Araber nach der Vereinigung mit den Türken die Wissenschaften verließen, und mit die-

diesen im 14 Jahrhunderte auch die Mathematik wieder zurückkehrte, haben Jak. Gelius und Edm. Halley alle 8 Bücher in lateinischer Sprache geliefert. Jener bekam die vorletzten 3 Bücher in arabischer Sprache aus Orient, und Halley erhielt das achte in einem ebenfalls arabischen Manuskripte aus der bodleianischen Bibliothek, welches er dann im Jahre 1706 lateinisch herausgab. In der original- oder griechischen Sprache sind aber nur noch die ersten vier vorhanden. Unter den neuern, welche im Geschmacke des Apollonius geschrieben, und sich durch die Deutlichkeit in ihren Beweisen ausgezeichnet hatten, war Gregorius von St. Vinzent. Heut zu Tage da die Mathematik einen so hohen Grad erreicht hat, ist auch die Theorie der krummen Linien besonders durch die Rechnung des Unendlichen auf's Höchste gebracht worden. Sie ist der eigentliche Probirstein der Mathematiker. Neben den Männern, die ich schon öfter, besonders aber im I. Theile 165 angerühmt habe, verdienen noch viele andere als Hr. Lambert, *de la Lande*, Belidor, Guisne, Smidth, Sauri, *de la Chapelle* ꝛc genannt zu werden. Die Abhandlung des *de la Chapelle* von den Kegelschnitten ist von dem Hrn. Joh. Lorenz Böckmann aus dem Französischen in's Deutsche übersetzt worden, und sowohl wegen der Theorie, als auch wegen dem Gebrauche und der praktischen Anwendung der Kegelschnitte einer besondern Empfehlung würdig.

§. 100.

Einen Kegel a b d (Tab. VI. Fig. V.) kann man auf fünferley Weise durchschneiden. 1) Kann er der Länge nach und selbst bey der Achse a c von einander geschnitten werden. 2) Kann der Schnitt mit der Grundfläche a c d, oder 3) mit einer Seite a b parallel gehen, 4) kann er außer der Achse seyn, aber doch mit ihr gleichlaufen. 5) Kann er von einer Seite

ab zu der andern ad schief durchgehen. Ein jeder solcher Schnitt giebt eine geometrische Figur, und zwar

der 1) ac ein geradlinichtes Dreyeck
der 2) on einen Zirkel,
der 3) ep eine Parabel,
der 4) ef eine Hyperbel,
der 5) mn eine Elypse.

Anmerk. Insgemein werden unter den Kegelschnitten nur die Parabel, Elipse und Hyperbel verstanden: das Dreyeck und der Zirkel aber unter die Elementargeometrie gerechnet. Neben den Kegelschnitten giebt es noch verschiedene krumme Linien, z. B. die Muschellinie (conchois); die Schneckenlinie; die Radlinie ciclois); die Logistik oder logarithmische Linie; zusammengesetzte Linien; Linien von doppelter Krümmung (duplicis curuaturae) welche nämlich nicht auf einer Fläche liegen, u. a.

Ueberhaupt werden jene krumme Linien, welche sich durch Gleichungen ausdrücken lassen, algebraische: jene aber, welche sich nicht durch Gleichungen ausdrücken lassen, transcendentische Linien genannt.

Neben den Kegelschnitten scheinen die Radlinie und die logarithmische Linie hier unserer Aufmerksamkeit besonders würdig zu seyn.

§. 101.

In der Parabel ist $y^2 = ax$

in der Elipse $y^2 = ax - \frac{ax^2}{b}$

in der Hyperbel $y^2 = ax + \frac{ax^2}{b}$.

Anmerk. Hier sind die drey Gleichungen, als der Grund von den Kegelschnitten zum Behuf des Gedächtniß auf einmal beysam-

sammen. Auch die Art des Beweises, die ich mit Hrn. geheimen Rath von Segner gewählt habe, ist die leichteste, kürzeste und einfacheste. Sie gründet sich hauptsächlich nur auf den Schnitt des Kegels selbst, und auch darauf, daß die Ordinate einer solchen krummen Linie, welche der Schnitt giebt, auf den Durchmesser eines entsprechenden Zirkelschnittes im Kegel senkrecht, folglich zwischen den Abschnitten desselben die mittlere Proportional sey.

§. 102.

In der Parabel ist $y^2 = a\,x$.

Bew. Es sey in einem senkrechten Kegel (Tab. VI. Fig. VI.) c e o eine halbe Parabel; c d eine Abscisse x, davon f e g ein halber Zirkel, oder die Basis des Kegels, auf dessen Diameter f g, die Ordinate d e = y senkrecht stehet. Mit dem Durchmesser f g des Zirkels mache man auf den Scheitel der Parabel eine gleichlaufende b c.

So ist I. $y^2 = fd \times dg$ (§. 50. b.)

nun ist $\triangle abc \backsim cdg$

also $ab : bc = cd : dg$

und II. $dg = \frac{bc \times cd}{ab} = \frac{bc}{ab} \times x$

folglich $y^2 = fd \times \frac{bc}{ab} \times x$

$fd = bc$ $\quad y^2 = \frac{bc^2}{ab} \times x$

Nun ist $\frac{bc^2}{ab}$ als eine beständige Größe der Parameter = a: also

$$y^2 = a\,x.$$

§. 103.

In der Elipse ist $y^2 = ax - \frac{ax^2}{b}$.

Bew. Es sey (Tab. VI. Fig. VII.) cdme eine halbe Elipse; fdge ein halber Zirkelschnitt im Kegel, auf dessen Durchmesser fg, die Ordinate de $= y$ wieder senkrecht seyn wird. Auf den Endpunkten von cm werden mit fg dem Durchmesser des Zirkels bc, mn gleichlaufend gezogen: so ist wieder

$$\text{I. } y^2 = fd \times dg$$

Um nun für fd und dg gleichgiltige Werthe zu finden, sey

	$cm = b$
	$dc = x$
so ist	$dm = b - x$
Weil nun	$\triangle cmn \backsim \triangle cdg$
so ist	$cm : mn = cd : dg$
subst.	$b : mn = x : dg$
folgl. II.	$dg = \frac{mn}{b} \times x$
Auch ist	$\triangle cmb \backsim \triangle dmf$
also	$cm : bc = dm : df$
subst.	$b : bc = b - x : df$
und III.	$df = \frac{bc}{b} \times \overline{b - x}$
Folgl. für fd u. dg ihre Werthe in II. u. III. bey I. subst. ist	$y^2 = \frac{mn \times bc}{b} \times \frac{bx - x^2}{b}$.

=

$$=\frac{mn\times bc}{b}\times x-\frac{x^2}{b}.$$

$\frac{mn\times bc}{b}$ ist wieder beständig: folglich der Parameter $=a$: also

$$y^2=a\times\left(x-\frac{x^2}{b}\right)=ax-\frac{ax^2}{b}.$$

§. 104.

In der Hyperbel ist

$$y^2=ax+\frac{ax^2}{b}.$$

Bew. c d e sey eine halbe Hyperbel; (Tab. VI. Fig. VIII.) d c eine Abscisse $=x$; d e eine Ordinate $=y$; f e g ein Zirkelschnitt, auf dessen Durchmesser f g, d e wieder senkrecht ist. Mit f g werde wieder die parallele b c gemacht: die Seite f a aber so weit fortgezogen, bis ihr die verlängerte d c begegnet. Dann werde auch g a so verlängert, und m n mit b c gleichlaufend gemacht. So ist wieder

I.	$y^2=fd\times dg$
nun sey	$cm=b$
so ist	$dm=b+x$
weil	$\triangle cdg \sim \triangle ncm$
so ist	$cm:mn=cd:dg$
subst.	$b:mn=x:dg$
also II.	$dg=\frac{mn}{b}\times x$

Auch

Auch ist $\triangle bmc \backsim \triangle fmd$

also $mc : bc = md : fd$

$b : bc = b + x : fd$

folgl. III. $fd = \frac{bc}{b} \times (b + x)$

nach I. II. u. III. $y^2 = \frac{bc \times mn}{b} \times \frac{bx + x^2}{b}$

$= \frac{bc \times mn}{b} \times x + \frac{x^2}{b}.$

$\frac{bc \times mn}{b}$ ist wieder der Parameter $= a$ also

$$y^2 = a\left(x + \frac{x^2}{b}\right) = ax + \frac{ax^2}{b}.$$

a) Wenn man die Sache genauer betrachtet, so liegt der ganze Unterschied der Parabel, Hyperbel und Elipse nur in der Lage und Länge der Linie oder Achse $cm = b$: durch die Veränderung von dieser wird eine Linie in die andere verändert. Setzt man z. B. in der Gleichnng der Elipse $b = \infty$: so wird

$$y^2 = ax - \frac{ax^2}{\infty}$$

$$= ax \qquad \text{(I. Th. §. 150.)}$$

also die Elipse zur Parabel. Macht man aber b negativ: so wird

$\times -b$ $\quad -by^2 = -abx - ax^2$

mut. sign. $\quad by^2 = abx + ax^2$

y²

$$y^2 = \frac{a\,b\,x + a\,x^2}{b}$$

$$= a\,x \quad + \frac{a\,x^2}{b}.$$

D. i. die Elipse wird in eine Hyperbel verwandelt.

b) In der Parabel ist nämlich das Quadrat der Ordinate genau dem Produkte oder Rechtecke aus dem Parameter in die Abscisse gleich. In der Elipse ist es kleiner: in der Hyperbel aber größer. Daher dann die Benennung **Parabel** von der Gleichheit: **Elipse** von dem Mangel: **Hyperbel** von dem Ueberschuße genommen sind.

Anmerk. Ueber die angeführten Beweise der drey Gleichungen können selbst des Hrn. geheimen Raths Segners *Elementa Analyseos finitorum Sect. XI.* §. 700. *et seq.* nachgelesen werden. Sie scheinen mir in ihrer Art um so viel besser zu seyn, als wir zugleich daraus die Nothwendigkeit und Beschaffenheit des Parameters (man hieß ihn sonst das *Latus rectum*) kennen lernen, an welchen doch Anfänger jederzeit Schwierigkeiten finden. Gleichwie nämlich sogar zur Bestimmung einer geraden Linie aus den Abscissen und Ordinaten eine bestimmte Höhe und Grundlinie vonnöthen ist: so braucht man auch hier einige bestimmte Seiten der Dreyecke, die miteinander verglichen werden. Diese Seiten sind nun bey einer Figur, eben so wie die Höhe und Grundlinie eines Dreyeckes beständig, und machen das Verhältniß der Abscissen und Ordinaten zu einer Gleichung geschickt. Auch sehen wir, wie der Parameter, der zwar als eine einfache Größe und Linie ausgedrückt werden mag, dennoch eine zusammengesetzte Größe seyn könne. S. *de la Chapelle* Abh. von dem Kegelschn. §. 16 — 20.

II. Abschnitt.

Von der Parabel.

§. 105.

Da einmal in der Parabel $y^2 = ax$ ist, wenigst wenn die Ordinaten auf der Achse senkrecht sind: so folget, daß

1) $$y = \sqrt{ax}$$

$$x = \frac{y^2}{a}$$

$$a = \frac{y^2}{x}.$$

2) Daß der Parameter die dritte Proportional zu jeder Abscisse und Ordinate sey.

3) Daß die Achse der Parabel im Anfange der Abscissen geschnitten werde: denn wenn

$$x = 0$$

ist $$ax = 0$$

also auch $$y = 0.$$

4) Daß die Parabel keine in sich wieder zurückkehrende Linie sey. (§. 98. 3.)

5) Daß sich die Quadrate der Ordinaten verhalten, wie die Abscissen: oder daß $y^2 : Y^2 = x : X$; denn wenn zwo verschiedene Ordinaten y, Y mit ihren Abscissen x, X bedeuten, a aber die beständige Größe oder den Parameter: so ist

$$y^2 = a x$$
$$Y^2 = a X$$
also $$y^2 : Y^2 = a x : a X$$
: a $$y^2 : Y^2 = x : X.$$

Anmerk. Es ist in der Physik bekannt, daß ein fallender Körper vermög seiner Schwere in der ersten Sekunde einen Raum von 15' zurücklege, und daß dieser Raum im fortgesetzten Falle immer so zunehme, wie die arithmetische Progreßion 1, 3, 5, 7 rc. Es sind also die Abscissen der Parabel eines unter was immer für einem Winkel geworfenen Körpers $aP = 1$, $ap = 1 + 3 = 4$, $ao = 1 + 3 + 5 = 9$ rc. (Tab. V. Fig. II.). Setzt man nun ihren Parameter $= 2500$: so kann man jeder Abscisse seine gehörige Ordinate so finden: weil nämlich

$y = \sqrt{a x}$: so ist

von $x = 1$, $y = \sqrt{2500 \times 1} = 50$
von $x = 4$, $y = \sqrt{2500 \times 4} = 100$
von $x = 9$, $y = \sqrt{2500 \times 9} = 150$
von $x = 16$, $y = \sqrt{2500 \times 16} = 200$.

Der Parameter einer Parabel, welche eine Stuckkugel unter einer horizontalen Richtung beschreibt, (gesetzt, daß sie vollkommen sey,) wird $= 24000$ angegeben. Man kann daher wieder die Ordinaten auf eben die Art finden, wie jetzt gezeigt worden. Es zeigt sich, daß $y = \sqrt{24000 \times 15} = 600'$, der Weg sey, welchen die Bombe in 1'' horizontal fortmacht. Im Gegentheile wird auch

$$a = \frac{600^2}{15} = \frac{360000}{15} = 24000.$$

§. 106.

1) Der Punkt der Achse, (Fig. III.) dessen Semiordinate dem halben Parameter gleich ist, heißt der Brennpunkt (Focus): oder bey dem Brennpunkte ist $y = \frac{a}{2}$.

2) Der Brennpunkt ist vom Scheitelpunkte so weit entfernet, als der vierte Theil des Parameters ausmacht. Oder wenn also von den Ordinaten und Abscissen der Achse die Rede ist: so ist die Abscisse vom Scheitel bis zum Brennpunkt dem vierten Theile des Parameters gleich,

$$x = \frac{a}{4}.$$

Bew. $ax = y^2$

$y = \frac{a}{2}$ nach 1)

Quadr. $y^2 = \frac{a^2}{4}$

subst. $ax = \frac{a^2}{4}$

: a $x = \frac{a}{4}.$

a) Wenn also $a = 2500$: (§. 105. Anm.) so wäre $x = \frac{2500}{4} = 625$ die Distanz des Brennpunktes vom Scheitel.

§. 107.

Eine jede gerade Linie f M (Tab. V. Fig. XI.) vom Brennpunkte der Parabel an ihre Krümmung gezogen gleichet der Abscisse a P = x, welche der Ordinate M P des Punktes M entspricht + der Distanz des Brennpunktes von dem Scheitel a, oder

$$fM = x + \frac{a}{4} = PB$$

Bew. $fM^2 = MP^2 + Pf^2$

$MP^2 = ax$ als die Ordinate.

$$Pf = x - \frac{a}{4}$$

folgl. $$Pf^2 = x^2 - \frac{2ax}{4} + \frac{a^2}{16}$$

$$= x^2 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16}.$$

Also subst. $$Mf^2 = x^2 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16} + ax$$

abgek. $$Mf^2 = x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16}$$

$\surd$ ausgez. $$Mf = x + \frac{a}{4}.$$

a) Es ist also $Mf = af + aP = BP$. Man pflegt auch eine auf die Achse senkrechte Linie dn, deren Entfernung vom Scheitel $aB = af$ vom Scheitel, die Leit- oder Richtungslinie (directrix) der Parabel zu nennen.

b) Weil beym Brennpunkte $y = \frac{a}{2}$, und $x = \frac{a}{4}$, so verhält sich dort die Abscisse zur halben Ordinate, oder $\frac{a}{4} : \frac{a}{2} = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = 1 : 2$. Zur ganzen aber wie $1 : 4$. D. i. es ist $x = \frac{y}{2}$, und $y = 2x = Bf$, wo durchaus y für die halbe Ordinate genommen wird.

 §. 108.

§. 108.

Aufg. 1) Geometrisch, 2) mechanisch eine Parabel beschreiben.

Aufl. des 1) Man macht 1) zwo senkrecht einander schneidende Linien N n und B S, wovon der Theil B a der Parameter sey. (Tab. V. Fig. XI.) 2) Beschreibt man so viele Zirkel, als man will, deren Mittelpunkte in B S liegen, und immer weiter von B abstehen, die Peripherie aber alle einander in B berühren. 3) Aus den Punkten m, r, s, wo die Zirkel die Achse schneiden, werden nun mit N n, aus den Punkten 1, 2, 3, wo die Zirkel die Linie N n schneiden, mit der Achse m b, r c mit N n gleichlaufend gezogen. Eine jetzt mit freyer Hand durch b, c, d fortgeführte Linie wird eine Parabel seyn. Denn weil m n = a 1, und a 1 die mittlere Proportional zwischen a m und a B ist; so ist $mn^2 = aB \times am$

oder weil $aB = a$, $mn = y$, $am = x$

so ist $rc^2 = aB \times ar$

$y^2 = ax$ rc.

Es sind also b, c, d Punkte einer Parabel.

Aufl. des 2) Man befestiget 1) über einem Papier ein Lineal N n (Tab. V. Fig. X.) ziehet eine Linie B S, wovon f der Brennpunkt, also a f = a B, und B f = dem halben Parameter ist. 2) Man befestiget auch einen Faden der Länge B S mit einem Ende in f, mit dem andern aber in c eines Winkelmaaßes,

ses, welches mit einem Arme d e genau an das obige Lineal, mit dem andern d c auf der Linie B S liege, so daß auch c dem S korrespondire. 3) Spannt man den Faden mit einem Stifte oder umgekehrten Gluse gegen c d hin immer fest an; rückt dann mit dem Linial von N gegen n fort: so wird der Stift auf dem Papiere eine Parabel a m M beschreiben.

Da der Faden = B S = f M + M C: so ist f m = B S — M C = B P = $x + \frac{a}{4}$. (§. 107.) So ein Punkt ist aber ein Punkt der Parabel, und da dieses in allen Punkten der Linie a m M wahr ist: so ist die ganze Linie eine parabolische Linie.

a) Nach der ersten oder geometrischen Auflösung den Brennpunkt zu bestimmen, darf nur eine Abscisse genommen werden, welche dem 4ten Theile des Parameters gleich ist. (§. 106. 2.)

b) Nach der 2) aber, wie auch nach §. 107. a. wird einleuchtend, daß in jedem Punkte der Parabel f M = M d: oder daß jeder Punkt der Parabel eben so weit von der Richtungslinie als vom Brennpunkte entfernt seyn müße.

§. 109.

Wenn man aus einem Punkte M der Parabel (Tab. V. Fig. XI.) eine Linie M f aus eben dem M auf die Linie B n eine senkrechte M d, und dann f d ziehet: so ist die gerade Linie T e M t, wel-

che

che durch das Mittel e der Linie f d auf den Punkt M gehet, eine Tangente.

Bew. Man nehme einen andern Punkt o als den Berührungspunkt an: so sage ich, daß er kein Punkt der Parabel sey, sondern sich außer derselben befinde. Wenn ich o n, o f und o d ziehe: so müßte gleichwie

$$Mf = PB = Md$$

also auch $of = RB$

$= on$ seyn.

Es ist aber $of > on$.

Denn gleichwie $\triangle fMe = \triangle dMe$ und gleichschenklicht

weil $fe = ed$

$eM = eM$ gemeinschaftlich

die zween Winkel bey e rechte sind: so ist auch den deßwegen

$\triangle foe = \triangle doe$ und gleichschenkl.

also die Seiten $fo = od$

nun ist $od > on$ (als die Hypothenus des $\triangle dno$)

also auch $fo > on$: folglich o kein Punkt der Parabel. Eben so läßt sich der Beweis für einen oberhalb M befindlichen Punkt der Linie M t führen.

a) Macht man aus M auf die Achse B R die Ordinate M P: so ist die Subtangente T P bestimmt: die senkrechte R M wird die Normal, und R P die Subnormal der Parabel werden. b)

b) Die Subtangente $TP = 2x$: die Subnormal RP aber $= \frac{1}{2}a$, (Tab. VI. Fig. XI.) wie ich unten beweisen werde, nun aber, um die Anfänger nicht zu sehr zu überhäufen, indessen annehmen will.

c) Wird dM gegen x verlängert: so ist der Winkel

$tMx = TMd$ (als Scheitelw.)

aber $TMd = tMF$ (weil $\triangle fmd$ gleichsch.)

also $tMx = fMT$

§. 110.

1) Eine Linie MN, die man aus einem Punkte M an der Seite der Parabel mit der Achse BS gleichlaufend zieht, heißt ein Durchmesser der Parabel (Tab. VI. Fig. XII.)

2) Wenn man mit der Tangente Tt eine Sehne ro parallel ziehet: so wird sie von dem Durchmesser MN in zween gleiche Theile getheilt.

Bew. Es seyen er, PM, Ko Ordinaten. NM und er werden bis in g verlängert: so ist

$$TP : PM = iN : No$$
$$= ig : gr$$

{ Denn $\triangle TPM \backsim iNo \backsim \triangle irg$ weil der Winkel $T = M = i$ und die bey P, g, N rechte sind.

Nun sey $PT = 2x$ (§. 109. b.)

$PM = y$

$iN = KL = u$

$ig = eL = t$

So

So wird I. $2x : y = u : \frac{uy}{2x} = No$

II. $= t : \frac{ty}{2x} = rg$

nach §. 105. 5. III $aP : aK = PM^2 : Ko^2$

$aP : ae = Pm^2 : er^2$

aber IV. $aP = x$, und wenn $aL = m$

$aK = aL + LK = m + u$

$ae = aL - eL = m - t$

$Pm^2 = y^2$

$$Ko^2 = (PM + No)^2 = y^2 + \frac{uy^2}{x} + \frac{u^2 y^2}{4x^2}$$

$$er^2 = (PM - rg)^2 = y^2 - \frac{ty^2}{x} + \frac{t^2 y^2}{4x^2}.$$

nach III. $x : m + u = y^2 : y^2 + \frac{uy^2}{x} + \frac{u^2 y^2}{4x^2}$

$y = 1$ $= 1 : 1 + \frac{u}{x} + \frac{u^2}{4x^2}$

nach IV. $x : m - t = y^2 : y^2 - \frac{ty^2}{x} + \frac{t^2 y^2}{4x^2}$

$y = 1$ $= 1 : 1 - \frac{t}{x} + \frac{4x}{t^2}.$

× äuß. u. mitt. $m + u = x + u + \frac{u^2}{4x}$

III. $m - t = x - t + \frac{t^2}{4x}$

subtr. $- \; + \; - \; + \; -$

u

$$u + t = u + t + \frac{u^2 - t^2}{4x}$$

$-(u+t)$ $$o = \frac{u^2 - t^2}{4x}$$

$+\frac{t^2}{4x}$ $$\frac{t^2}{4x} = \frac{u^2}{4x}$$

also endl. V. $$t = u$$

oder $$iN = ig.$$

Weil nun in $\triangle igr$ und ino die Winkel bey i Scheitelwinkel, die bey g und N zween rechte, $iN = ig$ ist: so ist

$$\triangle igr = \triangle iNo$$

also auch $$ir = io$$

§. III.

1) Jede zween Theile so einer Sehne werden Ordinaten des Durchmessers genannt. Und gleichwie überhaupt, so ist auch hier die vierfache Distanz des Scheitels vom Brennpunkte $= 4\,Mf$ der Parameter des Durchmessers.

2) In der Parabel ist auch das Quadrat der Ordinaten des Durchmessers dem Produkte aus dem Parameter desselben in die Abscisse gleich, welche der Orninate entspricht.

$$ir^2 = 4\,Mf \times Mi$$

oder $$y^2 = ax$$

Bew. Weil (nach vorhergehendem §. V.) $t = u$; so wird, wenn wir t anstatt u in $m + u = x + u + \frac{u^2}{4x}$ setzen

§. 110. IV. $m+t=x+t+\frac{t^2}{4x}$

$m-t=x-t+\frac{t^2}{4x}$

beyde add. $2m= 2x+\frac{2t^2}{4x}$

:2 u. — x $m-x=\frac{t^2}{4x}$

×4x $4x(m-x)=t^2$ } wenn $m-x=PL=v$.

$4vx=t^2$

auch ist $ir^2=ig^2+rg^2$

§. 110. II. $=t^2+\frac{t^2y^2}{4x^2}$

$=4vx+\frac{4vxy^2}{4x^2}$ } $y^2=ax=4fx$, wenn f = der Focallänge.

abgek. $=4vx+\frac{vy^2}{x}$

$=4vx+\frac{v\times 4fx}{x}=4vx+4vf.$

$=4(f+x)v=4(af+aP)Mi$

af=Ba §. 107 a.) $=4(Ba+aP)\times Mi$

Ba+aP=Mf §. 107. a.) also

$ir^2=4Mf\times Mi$

oder $y^2=ax$.

a) Obschon also die Ordinaten der Durchmesser auf die Durchmesser schief, die Ordinaten der Achse aber auf die Achse senkrecht sind: so ist doch bewiesen, und also allgemein wahr, daß in der Parabel allzeit $y^2=ax$ sey.

b)

b) Es verhalten sich daher auch hier die Quadrate der Ordinaten, obgleich diese auf den Durchmesser schief sind, dennoch wie die Abscissen. D. i. es ist allgemein

$$y^2 : Y^2 = x : X.$$

§. 112.

1) Wenn man sich vorstellt, eine Parabel a M N c (Tab. VI. Fig. II.) bewege sich um ihre Achse a b herum: so würde a M N c einen hohlen Körper bilden, den man einen parabolischen Afterkegel oder Paraboloide nennt, und bey welchem daher alle bisher bewiesenen Lehrsätze der Parabel Statt haben.

2) Wenn wir daher aus der Physik als bekannt annehmen, daß Schall und Licht allemal unter einem Winkel reflektirt werden, welcher dem Einfallswinkel gleich ist: so müssen sowohl die Schall- als Lichtstralen, welche in einem hohlen parabolischen Afterkegel mit der Achse parallel einfallen, in dem Brennpunkte gesammelt: die aber, welche vom Brennpunkte ausgehen, mit der Achse parallel fortgetrieben werden. Denn da man jeden Einfallspunkt M (Tab. VI. Fig. XI.) als eine unendlichkleine Fläche ansehen kann, welche der Tangente T t entspricht: so wird in einem jeden solchen Punkte der Winkel T M f = x M t (§. 109. c.) seyn, wovon einer allemal der Einfalls- der andere aber der Reflexionswinkel ist: kömmt also der Stral von v mit a R parallel auf M: so wird er auf f: kömmt er aber von

f

f auf M: so wird er mit a R parallel nach x hinausgehen: und da dieß von allen Punkten einer jeden Parabel wahr ist, ist es auch von dem ganzen hohlen parabolischen Afterkegel wahr.

Anmerk. Wenn man also in dem Brennpunkte f (Tab. VII. Fig. I.) eines parabolischen Hohlspiegels aus Metall, Gyps, oder auch Papier, wovon aber die letzten zween wohl vergoldet und planirt seyn müssen, eine Lampe setzt: so werden die aus f in a b einfallenden Stralen gegen m n hinausgetrieben, und also ganze Gallerien und Gassen beleuchten. Hält man aber den Spiegel der Sonne gerade entgegen: so werden die Lichtstralen m b n a im f gesammelt, und in einer kurzen Zeit einen in f gesetzten Körper entzünden, schmelzen ꝛc. Werden zween parabolische Spiegel in geraden Linien einander entgegengesetzt: so wird das Ohr eines Menschen, welches an dem Brennpunkte F des einen gehalten wird, die Perpendikelschläge einer in dem Brennpunkte f des andern angebrachten Uhr deutlich vernehmen. Eben so entzünden glühende Kohlen aus einem Spiegel entzündbare Körper, die sich im Brennpunkte des andern befinden.

Daß die parabolischen Sprachröhren die beßten, und sowohl den kegelförmigen, als noch mehr den zylindrischen vorzuziehen seyn, folgt aus eben dieser Eigenschaft der Parabel. Denn wenn die Stimme des Redenden genau vom Brennpunkte a ausgehet, (Tab. VII. Fig. II.) so werden die wo immer seitwärts anprellenden Schallstralen parallel, also nach einer Gegend hinausgehen, und eine gemeinschaftliche Wirkung hervorbringen.

Mit den Hörröhren hat es eine ähnliche Beschaffenheit. Es seye A B C ein Hörrohr: (Tab. VII. Fig. III.) der Theil A m n B habe die Gestalt eines parabolischen Afterkegels, dessen Brennpunkt in f ist. Steckt man das Stück C in das Ohr, und hält die Oefnung A B gegen eine Seite hin, von welcher man hören will: so werden die mit der Achse S f parallel einfallenden Schallstralen in f versammelt, und gegen c, wo der mindere Widerstand ist, hingetrieben, also

eine stärkere Erschütterung des Trommelfells, und beßeres Hören verursachen. Das weitere davon gehört in die Physik. Uebrigens verdient hier besonders des *de la Chapelle* Abhandlung von Kegelschnitten gelesen zu werden. Der Gebrauch der Parabel auf das Bombenwerfen, auf das Miniren, auf die Brennspiegel, Sprach- und Hörröhre, auf die Kamine wird in dieser besonders ausgeführt. Auch wendet er sie (§. 167.) auf die Verdopplung des Würfels und die Theilung eines Winkels in 3 gleiche Theile an.

III. Abschnitt.

Von der Elipse.

§. 113.

In der Elipse (Tab. VII. Fig. IV.) heißt A B die größere Achse (axis transuersus) auch Querachse: c e die halbe kleinere Achse (axis coniugatus); c der Mittelpunkt; f, F die Brennpunkte.

Wenn man A B : d e : a annimmt: so ist a der Parameter zur größern. nimmt man aber d e : A B ; a: so ist a der Parameter zur kleinern Achse.

§. 114.

Weil in der Elipse $y^2 = ax - \frac{ax^2}{b}$: so ist

1) $y = \pm\surd\left(ax - \frac{ax^2}{b}\right)$ d. i. jeder Abscisse respondiren zwo entgegengesetzte Ordinaten.

2) Die Elipse ist eine in sich selbst zurückkehrende Linie: denn wenn $y = 0$, so wird

$$0 = ax - \frac{ax^2}{b}$$

$$+ \frac{ax^2}{b} \qquad \frac{ax^2}{b} = ax$$

und endlich $x = b$ d. i. wo die Ordinate verschwindet, wird die Abscisse selbst zur größern Achse. Da also jeder Abscisse zwo entgegengesetzte Ordinaten respondiren: muß die Elipse in sich selbst zurückkehren.

3) Bey dem Mittelpunkte c ist $x = \frac{b}{2}$: und die Gleichung verwandelt sich in folgende:

$$y^2 = \frac{ab}{2} - \frac{ab^2}{4b} = \frac{ab}{2} - \frac{ab}{4}$$

$$= \frac{4ab}{8} - \frac{2ab}{8} = \tfrac{1}{4}ab$$

also $\quad y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ab}$

und $\quad 2y = \sqrt{ab}$

D. i. die kleinere Achse $= 2y$ ist der Quadratwurzel aus dem Parameter in die größere Achse gleich.

§. 115.

In der Elipse verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die Produkte der entsprechenden Segmente der Achse.

Bew. Wenn $PM = y$; $pm = Y$; $AP = x$, $Ap = X$; so ist nach der Gleichung

y^2

$$y^2 : Y^2 = a\left(x - \frac{x^2}{b}\right) : a\left(X - \frac{X^2}{b}\right)$$

$$= x - \frac{x^2}{b} : X - \frac{X^2}{b}$$

$\times b$ $= bx - x^2 : bX - X^2$

in Faktor. aufgel. $= x(b-x) : X(b-X)$

subst. endl. $y^2 : Y^2 = AP \times PB : Ap \times pB.$

§. 116.

Das Produkt oder Rechteck aus den Segmenten AP, PB verhält sich zum Quadrate der Ordinate, gleichwie das Qradrat der ganzen oder halben größeren Achse zu dem Quadrate der kleineren d. i.

$$\underline{AP \times PB : PM^2 = Ac^2 : ce^2 = AB^2 : ed^2}$$

Bew. $AP \times PB : Ac \times CB = PM^2 : ce^2$

$$Ac \times CB = Ac^2$$

also $AP \times PB : Ac^2 = PM^2 : ce^2$

vers. $AP \times PB : PM^2 = Ac^2 : ce^2$

$$= AB^2 : ed^2$$

a) Setzt man nun die größere halbe Achse $Ac = b$; die kleinere $ce = a$: so wird $AP = b - x$; $PB = b + x$, und die Proportion so stehen:

$$(b-x)(b+x) : y^2 = b^2 : a^2$$

also $b^2 - x^2 : y^2 = b^2 : a^2$

also $y^2 = \frac{a^2 b^2 - a^2 x^2}{b^2} = a^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2}$

eine Gleichung für die Elipse, wenn die Abscissen vom Mittelpunkte angenommen werden.

b) Auf eben so eine Art wird, wenn man die Abscissen vom Mittelpunkte rechnet, die Gleichung für den Zirkel $y^2 = a^2 - x^2$. Denn im halben Zirkel AZB sey $Cp = x$, $pe = y$: so ist der halbe Durchmesser $AC = a$ (Tab. II. Fig. V.)

$$Ap = a - x$$

$$Bp = a + x \quad \text{Es ist aber im Zirkel}$$

$$pe^2 = Ap \times pB$$

also subst. $\quad y^2 = (a-x) \times (a+x) = a^2 - x^2$

c) Setzt man in der obigen Gleichung der Elipse $b = a$, so wird

$$y^2 = \frac{a^2 b^2 - a^2 x^2}{b^2} = \frac{a^2 \times a^2 - a^2 x^2}{a^2} = a^2 - x^2$$

d. i. wenn die Durchmesser der Elipse gleich sind, so wird sie in einen Zirkel verwandelt.

§. 117.

Wenn die Ordinaten auf der kleinen Achse gezogen werden, z. B. er (Tab. VII. Fig. V.): so ist in der Elipse das Produkt aus den Segmenten zum Quadrat der Ordinate, wie das Quadrat der kleinern Achse zum Quadrat der größern.

Bew. Weil $b^2 - x^2 : y^2 = b^2 : a^2$ (§. 115. a.)

ist $\quad a^2 b^2 - a^2 x^2 = b^2 y^2$

$$a^2 b^2 - b^2 y^2 = a^2 x^2$$

$$(a^2 - y^2) \times b^2 = a^2 x^2 \quad \text{in eine Prop. verw. arith. §. 23.}$$

$$a^2 - y^2 : x^2 = a^2 : b^2$$

Nun ist $\quad a^2 - y^2 = (a-y)(a+y) = ur \times rD$

Wenn also $er = y$, ist $ur \times rD : er^2 = cu^2 : Ac^2$.

§. 118.

§. 118.

1) Die mit der Zirkelöfnung c A aus e an der Achse abgeschnittenen Punkte f F sind die Brennpunkte der Elipse. (Tab. VII. Fig. IV.)

2) Bey dem Brennpunkte der Elipse ist

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{4}\right)}$$

Bew. Der Brennpunkt ist überhaupt $y=\frac{a}{2}$: folgl.

$y^2=\frac{a^2}{4}$.

Nun ist in der Elipse

$$y^2=ax-\frac{ax^2}{b}$$

folgl. subst. $\frac{a^2}{4}=ax-\frac{ax^2}{b}$

$\times b$ $\frac{a^2 b}{4}=abx-ax^2$

$:a$ $\frac{a\ b}{4}=bx-x^2$

Transp. $x^2-bx=-\frac{ab}{4}$

Kompl. $x^2-bx+\frac{b^2}{4}=\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{4}$

Extr. $\sqrt{}$ $X-\frac{b}{2}=\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{4}\right)}$

Endlich $x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{4}\right)}$ Weil

Weil hier wieder eine positive und negative Wurzel von $\frac{b^2}{4} - \frac{ab}{4}$ möglich ist, so müssen in der Elipse zween entgegengesetzte Brennpunkte seyn.

§. 119.

Jede zwo gerade Linien MF + Mf, die von einem Punkte der Elipse an die beede Brennpunkte derselben gezogen werden, sind der grösseren Achse AB gleich: oder

$$MF + Mf = AB.$$

Bew. Die halbe grössere Achse Ac sey $= b$; die halbe kleinere $ec = a$, $CP = x$, $PM = y$: so ist

weil $Ac = eF$ (§. 118.)

$$b^2 = cF^2 + a^2$$

also ist I. $cF = \sqrt{(b^2 - a^2)}$

$$FP = cF - x = \sqrt{(b^2 - a^2)} - x$$

$$Pf = cF + x = \sqrt{(b^2 - a^2)} + x$$

Nun ist $FM^2 = FP^2 + MP^2$

$$= \sqrt{(b^2 - a^2} - x)^2 + y^2 \quad \left\{ \text{weil (§. 116. a.)}\ y^2 = a^2 - \frac{a^2x^2}{b^2} \right.$$

wirkl. quadr. $= b^2 - a^2 - 2x\sqrt{(b^2 - a^2)} + x^2 + a^2 - \frac{a^2x^2}{b^2}$

abgek. $= b^2 - 2x\sqrt{(b^2 - a^2)} + x^2 - \frac{a^2x^2}{b^2}$

$\sqrt{}$ ausgez. II. $FM = \sqrt{b^2 - 2x\sqrt{(b^2 - a^2)} + x^2 - \frac{a^2x^2}{b^2}} = b - \frac{x\sqrt{(b^2 - a^2)}}{b}$.

$$fM^2 = Pf^2 + PM^2$$

$$= \sqrt{(b^2 - a^2} + x)^2 + y^2$$

wirkl. quadr. $= b^2 - a^2 + 2x\sqrt{(b^2 - a^2)} + x^2 + a^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2}.$

$$= b^2 + 2x\sqrt{(b^2 - a^2)} + x^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2}$$

$$fM = \sqrt{b^2 + 2x(b^2 - a^2) + x^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2}}$$

III. $= b + \frac{x\sqrt{(b^2 - a^2)}}{b}.$

folglich $FM + fM = b - \frac{x\sqrt{(b^2 - a^2)}}{b} + b + \frac{x\sqrt{(b^2 - a^2}}{b}.$

$$= 2b = AB.$$

§. 120.

Aufg. Eine Elipse 1) geometrisch, 2) mechanisch beschreiben.

Aufl. des 1) Auf der grösseren Achse A B, die gegeben oder angenommen seyn kann, (Tab. VII. Fig. IV.) bestimme man 1) die Brennpunkte F, f. Sie können auch gegeben seyn: wenn aber die kleinere Achse gegeben ist, müßen sie nach (§. 118.) gesucht werden.

2) Mache man mit der Zirkelöfnung A n, aus F einen Bogen bey r, mit der Oefnung n B aus f einen andern, welcher den vorigen durchschneidet. Eben so

so beschreibe man mit A u, und u B, aus F und f durchkreuzende Bögen bey m u. s. w.

3) Ziehe man jetzt mit freyer Hand durch die Durchschnitte die beständige Linie B r m. Sie wird eine Elipse seyn.

Denn da A n + n B = A F + F B = A B; A u + u B = F u + f u = A B ꝛc. vorg. §.: so sind B, r, m, Punkte einer Elipse ꝛc.

Aufl. des 2) Man befestige eine Schnur von der Länge der größern Achse A B, mit einem Ende in F, mit dem andern in f ꝛc., spanne ihn mit einer Glufe, oder Bleystifte gegen B hin fest an, und fahre dann mit dem Bleystifte, und dem sogenannten Faden nach r, m, fort: so wird die Linie B r m, welche der Bleystift beschreibt, aus eben dem oben angeführten Grunde eine Elipse seyn.

§. 121.

Wenn wir in der IV. Fig. f M so weit verlängern, bis M K = M F wird: so ist die durch das Mittel vom K F und dem Punkte M gezogene gerade Linie T M t eine Tangente der Elipse auf M.

Gesetzt T t berührte die Elipse in einem andern Punkte o: so müßte, wenn man K o, o f, o F ziehet, nach §. 119.

f o + o F = A B seyn.

Es ist aber > A B

denn M K = M F ex construct.

und

und $Mf + MF = AB$
auch ist $Mf + MF = fK$
Da nun $of + oK > fK$
ist es auch $> AB.$

a) Daraus lernen wir auch schon auf jeden gegebenen Punkt eine Tangente machen.

b) Weil $Fx = xK$: so ist der Winkel
$$FMT = TMK$$
aber der Winkel $TMK = fMt$
also ist der Winkel $FMT = fMt.$

§. 122.

Wenn man die Achse BA bis in T verlängert: so haben die abgeschnittene Stücke cP, cA, cT folgende Proportion:
$$cP : cA : cT.$$

Bew. Es sey $cA = b$; $cF = cf = \sqrt{(b^2 - a^2)}$ (§. 119. I.) $= t$, $cT = S$, $cP = x$: so ist

$$\left.\begin{aligned} FM &= b - \frac{tx}{b} \\ fM &= b + \frac{tx}{b} \end{aligned}\right\} \text{(§. 119. II. und III.)}$$

$$FT = S - t,\ fT = S + t.$$

Da nun Fx und ft auf Tt senkrecht stehen: so ist das $\triangle tfM \backsim \triangle MFx$, und auch $\backsim \triangle TFx$, weil die Winkel bey M einander gleich, bey x und t rechte sind. Also ist

$$FM : fM = Fx : ft$$
$$= FT : fT \qquad \text{subst.}$$

subst. $b - \frac{tx}{b} : b + \frac{tx}{b} = s - t : s + t$

1 Verh. × b $b^2 - \frac{btx}{b} : b^2 + \frac{btx}{b} = s - t : s + t$

abgek. $b^2 - tx : b^2 + tx = s - t : s + t$

Wenn das 2te Verhältniß zum ersten addirt wird: so ist

$b^2 - tx + b^2 + tx : b^2 + tx = s - t + s + t : s + t$

$2b^2 : b^2 + tx = 2s : s + t$

1 Verh. : 2 $b^2 : b^2 + tx = s : s + t$

× $b^2 s + b^2 t = b^2 s + stx$

$- b^2 s$ $b^2 t = stx$

: t $b^2 = sx$

also $x : b : s$

d. i. $cP : cA : cT.$

a) Setzt man also (Tab. VII. Fig. V.) $cA = b$, $PT = Z$: so wird nach der bewiesenen Proportion

$x : b : x + Z$

× $x^2 + xZ = b^2$

$xZ = b^2 - x^2$

$b^2 - x^2 = (b + x)(b - x)$ und $b + x = Ac + cP = BP$; $b - x = Ac - cP = AP$: also wird aus

$xZ = b^2 - x^2$

$Ac \times PT = AP \times PB.$

b) Da nun ferner

$AP \times PB : Ap \times pB = MP^2 : ep^2$

und

und $\triangle TMP \backsim \triangle cpe$ { weil die Winkel bey P, p rechte, bey L u. T Wechselw. sind, zwischen E e, t T.

so ist auch $PM : pe = PT : cp$

quadr. $PM^2 : pe^2 = PT^2 : cp^2$

Wenn man also in der obigen Proportion für $PM^2 : pe^2$ setzt $PT^2 : cp^2$, so entstehet

$$AP \times PB : Ap \times pB = PT^2 : cp^2.$$

Nun ist $AP \times pB$, wenn $Ac = b$, $cp = r$ gemacht wird, $= (b+r)(b-r) = b^2 - r^2$. Also

subst. $xZ : b^2 - r^2 = Z^2 : r^2$

$b^2 = xZ + x^2$ $xZ : xZ + x^2 - r^2 = Z^2 : r^2$

$\times$ $r^2 xZ = xZ^3 + x^2 Z^2 - r^2 Z^2$

$: Z$ $r^2 x = xZ^2 + x^2 Z - r^2 Z$

$+ r^2 Z$ $r^2 x + r^2 Z = xZ^2 + x^2 Z$

in Fakt. gl. $r^2 (x+Z) = xZ(x+Z)$

$: x+Z$ $r^2 = xZ$

d. i. $cp^2 = AP \times PB.$

§. 123.

1) Eine jede Linie M d, welche durch den Mittelpunkt c der Elipse gehet, und beyderseits an die Elipse stößt, ohne eine Achse zu seyn, heißt ein Durchmesser. Ein anderer Durchmesser E e, der mit der Tangente von M parallel läuft, ist der koniugirte Durchmesser: und wenn wieder M d : E e : a, ist a der Parameter von M d: setzt man aber E e : M d : a: ist a der Parameter zu E e. Jede mit dem koniugirten

Durch-

Durchmesser gleichlaufende i h ist eine Ordinate des Durchmessers M d. (Tab. VII. Fig. V.)

2) Auch nach dieser Betrachtung ist in der Elipse

$$Mh \times hd : cd^2 = ih^2 : ce^2.$$

Bew. Es ist $\triangle cPM \backsim \triangle cLh$

also $cP : PM = cL : Lh$

oder subst. I. $x : y = g : \frac{gy}{x} = Lh$

auch ist $\triangle MTP \backsim \triangle iho$

also $PT : PM = ho : io$

subst. II. $Z : y = c : \frac{cy}{Z} = io$

daher $Lh + io = \frac{gy}{x} + \frac{cy}{Z} = in$

III. $in^2 = \frac{g^2y^2}{x^2} + \frac{2cgy^2}{Zx} + \frac{c^2y^2}{Z^2}$

$cn = Ln - cL = c - g$

IV. $cn^2 = c^2 - 2cg + g^2$

Nun ist $AP \times PB : An \times nB = PM^2 : in^2$

$An = Bc + cn$, $Bn = Bc - cn$: also ist $An \times nB = (Bc + cn) \times (Bc - cn) = Bc^2 - cn^2$ und folgl.

$$AP \times PB : Bc^2 - cn^2 = PM^2 : in^2$$

subst. V. $(b - x) \times (b + x) : b^2 - c^2 + 2cg - g^2$

$$= y^2 : \frac{b^2y^2 - c^2y^2 + 2cgy^2 - g^2y^2}{(b-x) \times (b+x)}$$

$$= y^2 : \frac{b^2y^2 - c^2y^2 + 2cgy^2 - g^2y^2}{b^2 - x^2} = in^2$$

also nach III. und V. ist

c²

$$\frac{c^2y^2}{Z^2}+\frac{2cgy^2}{xZ}+\frac{g^2y^2}{x^2}=\frac{b^2y^2-c^2y^2+2cgy^2-g^2y^2}{b^2-x^2}.$$

$:y^2$ $$\frac{c^2}{Z^2}+\frac{2cg}{xZ}+\frac{g^2}{x^2}=\frac{b^2-c^2+2cg-g^2}{b^2-x^2}$$

$-\frac{2cg}{xZ}\Big]$ $$\frac{c^2}{Z^2}+\frac{g^2}{x^2}=\frac{b^2-c^2-g^2}{b^2-x^2}+\frac{2cg}{b^2-x^2}-\frac{2cg}{xZ}$$

$$=\frac{b^2-c^2-g^2}{b^2-x^2}$$ { weil $b^2-x^2=xZ$ (§. 122. a.) also die Größen einander aufheb.

$\times x^2)$ $$\frac{c^2x^2}{Z^2}+g^2=\frac{b^2x^2-c^2x^2-g^2x^2}{b^2-x^2}$$

$-g^2$ $$\frac{c^2x^2}{Z^2}=\frac{b^2x^2-c^2x^2-g^2x^2}{b^2-x^2}-g^2$$

unt. ein. Benen. $$=\frac{b^2x^2-c^2x^2-g^2x^2-b^2g^2+g^2x^2}{b^2-x^2}$$

$$=\frac{b^2x^2-c^2x^2-b^2g^2}{b^2-x^2}$$

Wenn Zähler und Nenner mit x^2 multiplizirt wird: so ist

$$\frac{c^2x^4}{Z^2x^2}=\frac{c^2x^4}{(b^2-x^2)^2}$$

und also $$\frac{c^2x^4}{(b^2-x^2)^2}=\frac{b^2x^2-c^2x^2-b^2g^2}{b^2-x^2}$$

$\times b^2-x^2$ $$\frac{c^2x^4}{b^2-x^2}=b^2x^2-c^2x^2-b^2g^2$$

$\times b^2-x^2.$ $$c^2x^4=b^4x^2-b^2c^2x^2-b^4g^2-b^2x^4+c^2x^4+b^2g^2x^2.$$

$+b^2c^2x^2-c^2x^4$ $$b^2c^2x^2=b^4x^2-b^4g^2-b^2x^4+b^2g^2x^2$$

$:b^2.$

$; b^2 x^2 \qquad c^2 = \frac{b^4x^2 - b^4g^2 - b^2x^4 + b^2g^2x^2}{b^2x^2}$

VI. $= b^2 - x^2 + g^2 - \frac{b^2g^2}{x^2} = Ln^2 = ho^2$

Es ist aber $\triangle CPM \backsim cLh$

also $CP : cM = cL : ch$ Wenn nun $LM = S$:

so ist subst. VII. $X : S = g : \frac{gS}{x} = ch$

ferner ist $Mh \times hd = (cM + ch) \times (cM - ch)$
$= cM^2 - ch^2$

subst. VIII. $= S^2 - \frac{g^2s^2}{x^2} = \frac{s^2x^2 - g^2s^2}{x^2}$

Nun ist nach VIII., VI., VII. $\frac{s^2x^2 - s^2g^2}{x^2} : b^2 -$
$x^2 + g^2 - \frac{s^2g^2}{x^2} = s^2 : b^2 - x^2.$

Weil die äußern und mittleren Glieder einander gleich sind. Da nun $b^2 - x^2 = (b + x)(b - x) = AP \times PB$ (§. 18. b.): so verhalten sich dann

$Mh \times hd : ho^2 = cM^2 : AP \times PB$

oder $Mh \times hd : cM^2 = ho^2 : AP \times PB$

$AP \times PB = cp^2$ (§. 26. b.) $= ho^2 : cp^2$

Endlich ist $\triangle hio \backsim \triangle cpe$

folgl. $ho : cp = hi : ce$

quadr. $ho^2 : cp^2 = hi^2 : ce^2$

anstatt $hi^2 : cp^2$ subst.) $Mh \times hd : cM^2 = hi^2 : ce^2$.

Es zeigt sich daher eben dieselbe Eigenschaft der Elipse, es mögen die Ordinaten und Abscissen des Durch-

mes-

messers oder der Achse in die Rechnung genommen werden. (§. 116.)

Anmerk. So wie ein parabolischer, wird durch die Bewegung der Elipse um ihre Achse ein eliptischer Afterkegel erzeugt, welcher die Eigenschaft der Elipse nützlich und anwendbar macht.

Man setze die Elipsoide a e d b, (welche bey f und a Oefnungen hat, deren Mittelpunkte die Brennpunkte der Elipse sind), an das parabolische Sprachrohr. (Tab. VII. Fig. III.) Der Brennpunkt f soll genau auf den der Paraboloide, der andere a auf das Mundstück fallen. Redet nun jemand bey o in die Maschine: so werden die Schalstralen von diesem Brennpunkte allenthalben an die Wände der Elipsoide hinprallen, a e, a d z. B. auf e, d von da aus nach §. 121. b. in den andern Brennpunkt f springen. Da werden sie mehr angehäuft, zusammengedrückt, und also ihre Schnellkraft befördert: so stürzen sie sich, da sie nicht mehr zurückkönnen, mit vermehrter Geschwindigkeit in die Paraboloide, und da sie nun auch aus ihrem Brennpunkte herkommen, eilen sie mit vereinigten Kräften parallel nach der Achse hinaus, und pflanzen also jedes Wort weiter und genauer fort, als es je bey einem einfachen Sprachrohre geschehen kann.

Die Größe der Elipsoide zu einem Sprachrohr muß freylich durch Versuche bestimmet werden, wenn sie aber einmal bestimmt ist, so wird es nicht mehr schwer seyn, eine angemessene Paraboloide dazu zu finden. Da beyde einerley Brennpunkte bey f haben müssen: so müssen wohl auch beyde einerley Ordinaten am Brennpunkte haben. Weil nun die halbe Ordinate am Brennpunkte der Parabel dem halben Parameter gleich ist: so ist also der Parameter, und aus diesem nach §. 105. Anm. die ganze Paraboloide bestimmt. *De la Chapelle* giebt auch ein eliptisches Hörrohr an, welches er dem parabolischen vorzieht. S. seine Abhandlung von den Kegelschnitten §. 128. — 131. von der Elipse.

Die sogenannten gedruckten Gewölber, welche die Zimmerleute eben so, wie §. 120. 2. gezeigt worden, mechanisch auf-

aufzeichnen, sind halbe Elipsen. Wenn man so eine Decke eines Zimmers verfertigen läßt: (Tab. VII. Fig. IV.) so wird der, welcher in dem Brennpunkte F redet, im f deutlich, sonst aber nirgends verstanden werden. Durch verschiedene Einrichtung, Lage und Umstände bekömmt die Sache auch verschiedene Wendungen. Künstliche Echo, Verdopplung oder Vermehrung einer schwachen Stimme u. a. werden dadurch erhalten.

Man mache von Blech eine Elipsoide in der Gestalt, wie die VI. Figur zeigt. Der eine Brennpunkt falle in die Mitte des Bechers a; der andere außer der Maschine in die freye Luft bey f. Stellt man in a ein brennendes Licht: so werden die Stralen desselben, welche in den Kegel dringen, allenthalben an die Wände e d ꝛc. hingeworfen, und da sie sich von daaus in f wieder sammeln, einen kleinen Gegenstand außerordentlich beleuchten. Es dient daher die Elipsoide auch ausnehmend, kleine Körperchen den Augen sichtbar zu machen.

Es gehört nicht zu meinen Endzweck zu beweisen, daß auch ein schiefer Schnitt der Walze eine Elipse gebe, obschon eben der Beweis so schwer nicht wäre. Serenus hat dieses schon vor mehr als 1000 Jahren eingesehen, und in zweyen ganzen Büchern ausführlich davon geschrieben, welche Halley herausgegeben hat.

IV. Abschnitt.

Von der Hyperbel.

§. 124.

In der Hyperbel (Tab. VII. Fig. VII.) ist A B die größere Achse, (axis transuersus) e d die kleinere, (axis coniugatus) c der Mittelpunkt. A und B die Scheitel. Macht man C F = c f = A e, so sind F, f die Brennpunkte. Ist A B = e d: so ist die Hyperbel gleichseitig, und wenn man A B : e d : a; so ist a der Parameter zu A B.

§. 125.

Da in der Hyperbel $y^2 = ax + \frac{ax^2}{b}$: so ist

1) Die Hyperbel gleichsam eine Elipse von einer negativen Achse.

2) Die Hyperbel kehrt nie in sich selbst zurücke: sondern, wenn man $y = 0$ setzt: so wird nach der Uebersetzung auch $x = 0$ oder wohl gar $-b$; denn wenn

$$0 = ax + \frac{ax^2}{b}$$

wird $\quad -abx = ax^2$

und $\quad -b = x.$

3) Weil $-b = x$, kann auch $b = -x$ werden, und wenn die Abscisse negativ genommen größer wird als die Querachse A B: so wird

$$y^2 = -\frac{a\,x}{b} x - (a + x) = a\,x + \frac{a\,x^2}{b};$$

also eine mögliche Größe. D. i. Es giebt daher auch auf der entgegengesetzten Seite Ordinaten A p, r o, und die Hyperbel hat vier unendliche Schenkel.

4) So wie bey der Elipse (§. 114. 3.) ist auch hier im Mittelpunkte c die kleinere Achse oder

$$2\,y = \sqrt{a\,b}.$$

5) Weil beym Brennpunkte in der Elipse $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - \frac{a\,b}{4}\right)}$, so ist hier $x = \frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{a\,b}{4}\right)}$.

6) Eben so ist, wie bey der Elipse F M + f M = A B, hier F r — f r = A B.

7) Lösen wir $a\,x + \frac{a\,x^2}{b}$ wieder nach Art des §. 19. in Faktorn auf: so wird hier

$$Y^2 : y^2 = x\,(b + x) : X\,(b + X)$$
$$= A\,P \times P\,B : A\,p \times p\,B.$$

§. 126.

Aufg. Eine Hyperbel beschreiben.

Aufl. Man ziehe die unbestimmte p o, wovon A B die größere Achse sey, und bestimme nach §. 125. 5. die Brennpunkte. Man mache mit einer größern Zir-

kelöfnung, als F B ist, aus F einen Bogen bey r. Nehme F r — A B = i r, und mit dieser Oefnung mache man aus f einen Durchschnitt des obigen Bogens: so ist r ein Punkt der Hyperbel: weil F r — f r = A B ist. (§. 125.)

§. 127.

Setzt man den Anfang der Abscissen in c, und c e = a, A c = b, P M = y: so wird, weil überhaupt die Gleichung der Hyperbel die umgekehrte der Elipse ist, nach §. 116. a.

1) $$y^2 = \frac{a^2 x^2 - a^2 b^2}{b} = \frac{a^2 x^2}{b^2} - a^2$$

2) $$PM^2 : AP \times PB = ce^2 : Ac^2 = de^2 : AB^2$$

denn wenn man $y^2 = \frac{a^2 x^2 - a^2 b^2}{b^2}$ in eine Proportion auflöset: so entstehet

$$y^2 : x^2 - b^2 = a^2 : b^2$$

oder $$y^2 : (x - b) \times (x + b) = a^2 : b^2$$

aber $$x - b = AP,\ x + b = PB$$

folgl. subst. $$PM^2 : AP \times PB = ce^2 : Ac^2 = de^2 : AB^2.$$

a) Aus $y^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2} - a^2$ wird $a^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2} - y^2$, dessen wir uns §. 132. bedienen werden.

§. 128.

Wenn man durch den Scheitelpunkt A eine mit der kleinern Achse gleichlaufende K k macht, so daß A K = c e werde, und dann durch c und K vor- und rückwärts gerade Linien c K, c s fortzieht: so heißen diese Aßymtoten der Hyperbel.

2) Die Aßymtoten der Hyperbel können mit den Schenkeln derselben nie zusammenfallen.

Bew. Es sey $AB = b$: so ist $Ap = x$; $AC = \frac{b}{2}$, und $cp = \frac{b}{2} + x$. $AK = \frac{1}{2}\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{ab}{4}}$.

Nun ist $Ac : AK = cp : pR$

$$\frac{b}{2} : \sqrt{\frac{ab}{4}} = \frac{b}{2} + x : pR$$

quadr. $$\frac{b^2}{4} : \frac{ab}{4} = \frac{b^2}{4} + bx + x^2 : pR^2$$

1 Verh. : $\frac{b}{4}$ $$b : a = \frac{b^2}{4} + bx + x^2 : pR^2$$

$$pR^2 = \frac{ab^2}{4b} + \frac{abx}{b} + \frac{ax^2}{b}$$

$$= \frac{ab}{4} + ax + \frac{ax^2}{b}$$

Nun ist $$PM^2 = ax + \frac{ax^2}{b}$$

$$pR^2 - pM^2 = \frac{ab}{4} + ax + \frac{ax^2}{b} - ax - \frac{ax^2}{b} = \frac{ab}{4}$$

D. i.

D. i. das Quadrat der kleinern Achse, oder der vierte Theil des Produktes aus dem Parameter in die größere Achse kann niemal = o werden, welches doch geschehen müßte, wenn die Aßymtoten mit den Scheukeln der Hyperbel zusammenfallen sollen.

§. 129.

Wenn man den Winkel f r F in zween gleiche Theile theilet, und durch das Mittel desselben eine gerade Linie t r ziehet: so ist diese eine Tangente der Hyperbel in r. Denn es ist r F — r i = r F — r f = A B, also r ein Punkt der Hyperbel, welches nur in dem Punkte r der Linie t r seyn kann. So wäre z. B. u kein Punkt der Hyperbel: weil u F < u f + i F, und also auch u F — u f < i F, also auch kleiner als A B ist.

§. 130.

1) Eine Hyperbel a R r (Tab. VII. Fig. III.) in Rücksicht auf ihre Aßymtoten betrachtet, wird die Hyperbel zwischen den Aßymtoten (Hyperbola intra asymtotos) genannt. Und wenn vom Scheitel mit den Aßymtoten zwo Parallelen A B, A d an dieselben gezogen werden: so ist A c B d ein gleichseitiges Parallelogram, und das Quadrat einer Seite A d oder c d die Potenz der Hyperbel.

2) Die Gleichung der Hyperbel zwischen den Aßymtoten ist

$$a^2 = x y.$$

Bew.

Bew. Man verlängere BA gegen h fort, und eben so die Ordinate PM bis in g: so ist, weil das $\triangle cmd \backsim cgP$

$$cP : Pg = cd : dm.$$

Wenn $cP = x$, $Pgc = cd = Ad = a$, $dm = y$: so ist

$$x : a ; y$$

$$\text{also } a^2 = xy$$

a) Ziehet man durch i die Linie LK, macht dann $Ks = iL$: so ist auch s ein Punkt der Hyperbel, und wir werden dadurch in Stand gesetzt, eine Hyperbel zwischen den Aßymtoten zu beschreiben.

§. 131.

Aufg. Aus den gegebenen Aßymtoten der Hyperbel auf dem Punkte e eine Tangente beschreiben.

Aufl. Man mache eQ mit der Aßymtote cd gleichlaufend, nehme cQ von cQT: so ist Tet die verlangte Tangente.

§. 132.

Man mache zween Durchmesser AB, de. (Tab. VII. Fig. IX.) de sey mit der Tangente tT parallel. So sind AB, de koniugirte Durchmesser; und die mit de gleichlaufende PM der Linie Qr ist eine Ordinate des Durchmessers AB.

2) Das Quadrat der Ordinate PM verhält sich zum Produkt der Abscissen AP und PB, wie das Quadrat

drat des halben Durchmessers d e zum Quadrat des halben Durchmessers A B,

$$PM^2 : AP \times PB = ce^2 : Ac^2.$$

Bew. $Ac = Bc = b$. $dc = ce = TA = At = a$. $cP = x$; $PM = y$: so ist

$$AP = x - b$$

$$BP = x + b.$$

Da nun das $\triangle cAT \backsim cPQ$:

so ist $$Ac : AT = cP : PQ$$

$$b ; a = x : \frac{ax}{b} = PQ$$

also $$QM = PQ - PM = \frac{ax}{b} - y$$

$$Mr = PQ + PM = \frac{ax}{b} + y$$

$$QM \times Mr = \left(\frac{ax}{b} - y\right) \times \left(\frac{ax}{b} + y\right)$$

nach §. 127. a. ist $$= \frac{a^2x^2}{b^2} - y^2 = a^2$$

$\times b^2$ $$a^2x^2 - b^2y^2 = a^2b^2$$

$+b^2y^2$ u. $-a^2b^2$ $$a^2x^2 - a^2b^2 = b^2y^2$$

oder $$(x^2 - b^2)\,a^2 = b^2y^2$$

in eine Proport. $$x^2 - b^2 : y^2 = b^2 : a^2$$

subst. $$AP \times PB : PM^2 = Ac^2 : ce^2$$

und $$PM^2 ; AP \times PB = ce^2 : Ac^2$$

$$= de^2 : AB^2.$$

a) Es ist also die Eigenschaft der Hyperbel, welche ich §. 127. in Absicht auf die Achsen gezeigt habe, auch in Rücksicht auf ihre Durchmesser bewiesen.

An=

Anmerk. Die Hyperbel hat besonders in der Dioptrik und Katoptrik ihren Nutzen. Es werden zu viele Kenntniße aus der Physik und Dioptrik erfodert, um die Anwendung der Hyperbel auf diese vollends zu begreifen: ich will daher nur ihre Brauchbarkeit in der Katoptrik, das ist, bey hohlen und erhabenen Spiegeln in etwas erwähnen.

Denkt man sich: Eine Hyperbel wälze sich um ihre Achse, so wird zugleich ein hohler und erhabener hyperbolischer Afterkegel, oder eine Hyperboloide erzeugt. Von beyden Oberflächen werden auffallende Lichtstralen so zurückgeworfen, daß sie sich irgendwo in einen Punkte versammeln müssen. Und zwar werden jene Stralen, z. B. a c, welche auf die erhabene Seite also fallen, daß sie, wenn man sie verlängert, den Brennpunkt F trefen, alle in den Brennpunkt f der entgegengesetzten Hyperboloide zurückspringen. Denn da es eben so viel ist, als fielen sie bey c auf die Tangente T t: so ist der Winkel a c t = T c f, weil nach §. 128. der Winkel a c t = b c t, und b c t = T c f, als Scheitelwinkel, d. i. der Reflexionswinkel wird dem Einfallswinkel gleich, wenn a c auf f zurückspringt: da also dieses von allen übrigen Stralen o m, r n, deren Richtung nach F gehet, wahr ist: so müssen alle in einem Punkte, d. i. in dem Brennpunkte der entgegengesetzten Hyperbel gesammelt werden. (Tab. VII. Fig. X.)

Fallen aber bey c auf die hohle Oberfläche der Hyperboloide Lichtstralen auf, deren Richtung nach f, d. i. nach dem Brennpunkt der entgegengesetzten Hyperbel geht: so werden sie alle in F zurückgeworfen. Denn da die Tangente t T eben dieselbe ist: so ist auch wieder der Reflexionswinkel F c T dem Einfallswinkel b c t gleich. Eben dieß widerfährt den Stralen u m, L n: sie müßen daher alle in dem Brennpunkte F gesammelt werden. Diese Eigenschaft der Hyperbel ist es, wodurch sie sich in Rücksicht auf die Kaptoptrik von den übrigen krummen Linien auszeichnet.

V. Ab-

V. Abschnitt.

Von der Zykloide.

§. 133.

Ein Zirkel A o (Tab. VIII. Fig. I.) bewege sich auf einer geraden Linie A E also fort, daß, wenn anfangs sein Punkt A auf den Anfangspunkt der Linie A E fällt, und nach diesem der Punkt d auf R, o auf B u. s. w. nach vollendeter Revolution die ganze Peripherie des Zirkels A o auf der A E entwickelt werde: so wird indessen der Punkt A eine krumme Linie A d C E beschreiben, die man eine Zykloide, Trochoide oder Radlinie (Cyclois) nennt.

§. 134.

1) Daraus folget schon, daß der Bogen $Ad = AR$ die halbe Zirkelperipherie $A\,d\,o$ aber $= AE$.

2) Auch ist $dg = gc$.

Bew. Es ist $AR = Ad = gB$

$$AB - AR = BR$$

aber $$BR = CgB - Bg = Cg$$

auch ist $$BR = nu = du - dn$$

$$= du - gu = dg$$

also ist $$dg = cg.$$

3) Nennt man daher den Bogen $cg = x$: so ist

$$y = x$$

die Gleichung für die Radlinie.

An=

Anmerk. Die Zykloide, von der hier die Rede ist, und deren Basis der Peripherie des beschreibenden Zirkels gleich ist, ist die gewöhnliche. Es giebt auch verlängerte und verkürzte Zykloiden, je nachdem die Basis entweder größer oder kleiner als die Peripherie des Zeugezirkels ist. Läßt man einen Zirkel über einen andern Zirkel fortwälzen: so heißt die daraus entstehende Linie ein Epizykloide. Allein es soll genug seyn, diese hier nur genennt zu haben.

§. 135.

Aufg. Eine Radlinie 1) mechanisch, 2) geometrisch beschreiben.

Aufl. des 1) Man lasse ein viereckigtes Brett a b c d verfertigen (Tab. VIII. Fig. II.), an dessen einer Seite b d eine Leiste hervorrage, so, daß sich eine hölzerne Scheibe A a M m darauf fortwälzen könne. An dieser hölzernen Scheibe befestige man eine Schnur oder ein Band in A, und an eben dem Orte A werde eine Kreide, Bleystift oder Gluse angebracht. Legt man nun die Scheibe so auf das Brett, daß A genau auf b anpasse; wälzt sie dann, indem man ein Ende des Bandes immer an A hält, gegen d fort: so wird die Kreide oder der Bleystift, indeß das Band der ganzen Länge nach die Peripherie an b d zurückläßt, eine Zykloide A m c d beschreiben, wie selbst schon aus dem Begriffe der Zykloide folgt.

Aufl. des 2) Es sey A B der Durchmesser des Zeugezirkels, und B C die halbe Peripherie desselben, (Tab. VIII. Fig. III.) Man mache also den Zirkel A p n B, und theile ihn in gleiche Theile

von

von beliebiger Zahl ein. In eben so viel gleiche Theile theile man auch B c, und ziehe auf die Theilungspunkte m n o ꝛc. mit B c gleichlaufende M m, N n ꝛc. so, daß M m 5 Theile von B c erhalte, N n aber 4, O o 3, P p 2, Q q einen. Zieht man nun über die Endpunkte dieser Linien mit freyer Hand C M N O P Q A fort: so ist sie eine halbe Radlinie. Denn da A B = B Q und P m = B c: so ist A B — B m = B c — B 1 = M m: also M ein Punkt der Zykloide. Eben so ist A B — B n = B c — B 2 = N n u. s. w. Verfährt man nun auf der andern Seite eben so: so ist die ganze Zykloide fertig.

Anmerk. Um die Basis der Peripherie des Zeugezirkels genau gleich zu machen, darf nur ein Faden um einen Zylinder von eben der Peripherie gewunden, oder ein biegsames Linial an denselben gelegt werden. *De la Chapelle* nennt daher diese Methode die Zykloide zu beschreiben theils mechanisch, theils geometrisch.

§. 136.

Wenn man M h mit B E parallel setzt, (Tab. VIII. Fig. IV.) und T h für die Tangente des Zirkels, t T aber für die Tangente der Radlinie in M annimmt: so werden sich diese zwo Tangenten in einem Punkte also schneiden, daß t h = h M entstehe.

Bew. Wenn man M r mit t h parallel macht: so würde sie innerhalb der Zykloide fallen: und die angenommene Tangente M T, welche außerhalb der Zykloide fällt, würde sie, und also auch ihre gleichlaufende t h irgendwo durchschneiden. Nun

sey

sey o u der Linie h M unendlichnahe und parallel: so können h o und M u wegen ihrer unendlichen Kleinheit als Theile der Tangenten des Zirkels und der Zykloide gelten, und weil

$$\triangle tou \backsim \triangle thM$$

so ist I. $ht : ot = Mh : ou$

oder II. $ht - ot : ht = Mh - ou : Mh$

$$Mh = Ah$$

$$ou = Ao$$

also $Mh - ou = Ah - Ao = oh$

auch ist $ht - ot = oh$

also in II. für $Mh - ou$ und $ht - ot$ gesetzt oh, wird

$$oh : ht = oh : Mh.$$

aber $oh = oh$

also auch $ht = Mh.$

§. 137.

Die Tangente der Zykloide ist mit der Senne, welche von dem Scheitelpunkte an den entsprechenden Punkt des Zeugezirkels gehet, gleichlaufend.

Bew. Wenn man M h bis in g verlängert: so ist das Maaß

des Wink. $Ahg = \frac{ag}{2} = \frac{Ah}{2}$ (als Periph. Winkel.)

auch ist $Aht = \frac{Ah}{2}$ (als Winkel der Senne und Tangente.)

also ist $Ahg + Aht = 2\,Aht$

Nun

Nun ist auch $thg = t + M$ (§. 24.)
$= 2t$ (weil $t = M$.)
also $2t = 2Aht$
: 2 $t = Aht$

Es sind aber t, und Aht Wechselwinkel zwischen der Senne Ah, und der Tangente der Zykloide tM. Es müssen also Ah, und tM parallel seyn. (§. 21.)

§. 138.

In der Radlinie ist jeder Bogen AM zweymal so groß, als die entsprechende Senne Ah oder

$$AM = 2Ah.$$

Bew. Von A ziehe man auf den Punkt n noch eine Senne Ao: so ist ino ein gleichschenklichtes Dreyeck. Denn es ist

der Winkel $aho = \frac{ah}{2}$ {als Winkel der Tangente und Senne.

$hio = \frac{ah}{2}$ (als Wechselwinkel.)

folgl. $hio = Aho$

und daher das Dreyeck ioh gleichschenklicht. Macht man nun mit dem Radius ao einen Bogen no: so kann er, weil Ko und gh unendlichnahe sind, als eine Perpendikulär angesehen werden, welche die Grundlinie des gleichschenklichten Dreyeckes in zween gleiche Theile theilet. Daher die Differenz der zwo Korden oder

$$Ah - Ao = \frac{ih}{2} = in$$

Es

Es ist aber die Differenz der zweyen Bögen A M und A u:

$$AM - Au = Mu = ih$$
$$= 2in$$

Da nun Sum. $in = Ah$

Sum. $Mu = AM$

so ist $AM = $ Sum. $2in$

und endlich $AM = 2Ah$.

a) Ein jeder Bogen der Radlinie ist also zweymal so groß, als die Senne des Zeugezirkels, welche ihm entspricht. Die halbe Radlinie ist 2, und die ganze 4 Durchmessern des Zeugezirkels gleich.

b) Da nun die Peripherie des Zirkels zu seinen Diameter = 100 : 314 oder 10000 : 31416: so verhält sich die Radlinie zum Diameter des Zeugezirkels 100 × 4 : 314 = 400 : 314 oder 40000 : 31416. In kleinern Zirkeln, wo auch das Verhältniß 7 : 22 Statt hat, ist sie = 7 × 4 : 22 = 14 : 11.

§. 139.

Stellt man sich eine Zykloide in zween Theile A E und a e getheilt vor, die bey A zusammengefügt sind, und befestigt man in A einen Faden, den man genau an A c E hinhält: so wird, wenn sich dieser Faden = A E abwickelt, der Punkt M eine krumme Linie beschreiben, die man die Linie der Evolution nennt. A c E heißt die Evolute, und jeder Theil c M, der sich abgewickelt hat, der Halbmesser der Krümmung.

Es

Es ist einleuchtend, daß hier

A c M = A c E. (Tab. VIII. Fig. V.)

2) Errichtet man auf den Halbmesser der Krümmung eine Perpendikulärlinie o M t, so ist sie die Tangente der Evolution E M B in M.

Bew. o M t kann die Linie E M B weder bey o, noch bey t berühren, noch auch irgendwo schneiden.

1) Sie kann sie nicht bey t berühren. Denn weil c M auf o t senkrecht ist: so ist das △ t c M rechtwinklicht, also offenbar

die Hypot. c t > c M (als Hypothenus.)

und folgl. A c t > A c M

also auch > A c E.

t kann daher kein Punkt der Zykloide seyn. Eben so ist, weil auch M c o rechtwinklicht ist,

c o > c M

folglich auch A c o > A c M

> A c E.

Es kann also o kein Punkt der Zykloide seyn, und o M t kann die Linie E M B bey o nicht berühren.

Sie kann sie auch nicht schneiden; sonst müßte entweder c M auf o t nicht senkrecht seyn, welches wieder die Voraussetzung ist, oder M müßte innerhalb der krummen Linie hineinfallen, und also A c M < A c E werden, welches falsch ist. Es bleibt also nur M als der Berührungspunkt, und E M t ist eine Tangente der Linie E M B bey M.

§. 140.

Die Evolution der halben Zykloide E M B ist selbst eine halbe Zykloide von eben der Größe.

Bew. Man nehme $\frac{AcE}{2} = \frac{AcM}{2}$ als einen Durchmesser an, und beschreibe daraus den Zirkel a h B a: so ist dieser der Zeugezirkel der halben Zykloide E M B. Mit eben dem Durchmesser beschreibe man den Zirkel r M t r: so werden r M und M t Sennen seyn, die auf dem Diameter stehen. Zieht man nun mit a E eine gleichlaufende, und die Sennen a h, h B: so ist

der Winkel a h B = 90° ⎧ als Periph. Winkel auf
u. der Winkel r M t = 90° ⎩ dem Diam.
folgl. a h B = r M t
u. der Winkel B = t

also M t mit h B parallel. Es ist aber M t die Tangente von E M B; E M B ist also eine halbe Zykloide (§. 137.) und zwar von eben der Größe, wie A c E, weil ihre Tangente mit der Senne ihres Zeugezirkels gleichlaufend ist.

a) Wenn man daher eine aus Meßing oder Holz verfertigte Zykloide mitten voneinander schneidet, dann die zwey Stücke, so wie hier in der Figur A E, A e zeigen, bey A zusammenfügt; an einem in A befestigten Faden A M = A E ein Gewicht M anbringt: so wird das Gewicht M, wenn es in die gehörige Ordnung gesetzt wird, indem sich der Faden A M an A E, A e auf und ab windet, beständig eine Zykloide beschreiben.

An=

Anmerk. Diese schöne Erfindung haben wir dem Hyghens zu verdanken. Er glaubte anfänglich, daß nur die gewöhnliche Zykloide durch die Evolution ihres gleichen erzeuge. Es hat aber Bernoully Op. T. III. P. 450, 458 sq. bewiesen, daß dieses die Eigenschaft aller möglichen Zykloiden sey.

Neben dieser entdeckte Hyghens noch eine Eigenschaft an der Zykloide, die man den Isochronismus nennt. Er fand nämlich, daß ein Körper, der sich vermög seiner Schwere in einer umgekehrten Zykloide E B e bewegte, so ohngefähr wie in diesem §. a. angezeigt worden, nicht mehr Zeit brauche von E bis B zu fallen, als von M, oder von a. Mit wie vielem Vortheile sie Hyghens auf die Uhren angewandt, und zu was für einen Grad der Vollkommenheit er diese dadurch gebracht habe, werden wir aus den bisher bewiesenen Sätzen in der Physik vollends darthun.

Zu beyden ungemein schätzbaren Entdeckungen, setzte Johann Bernoully noch die dritte hinzu, indem er bewies, daß die Zykloide auch eine Linea brachyſtochrona sey, d. i. der kürzeste Weg, auf welchem ein fallender Körper von E nach B kommen kann, wieder den natürlichen Begriff, und den geometrischen Grundsatz, daß jederzeit die gerade Linie der kürzeste Weg von einem Punkte zum andern sey. Auch von diesem werden wir in der Physik sprechen.

Ueberhaupt verdienet diese Linie auch nur deßwegen schon genauer gekannt zu werden, weil sie die berufene curua isochrona, und der Gegenstand eines großen Problems ist, welches den vorhin schon bekannten Werth der Differentialrechnung genauer bestimmte (Arithm. S. 205.) und an dessen Auflösung die ersten Genies von Europa gearbeitet haben.

Damals waren wirklich die glücklichsten Zeiten für die höhern philosophischen Wissenschaften: eine wahre Epoche für die Mathematik. Der Werth der bisher verkannten Differentialrechnung fieng an sich in seinem ganzen Umfange zu zeigen. Die größten Geister Deutschlandes, Frankreichs, Engellandes und der Schweitz prüften in Auflösung der schweresten und nützlichsten Aufgaben ihren Scharfsinn, und was am merkwürdigsten ist: so verschieden auch die Wege waren,

die diese großen Männer bey ihrer Erfindung der Curuae isochronae einschlugen, so angenehm war ihr Erstaunen, da sie sich zuletzt alle an einem und eben demselben Ziel befanden. Ein überzeugender Beweis, wie sicher deine Grundsätze sind erhabene Mathematik! *de la Chapelle.*

Viertes Hauptstück.

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die krummen Linien.

I. Abschnitt.

Anwendung der Differentialrechnung.

Von der Bestimmung der Tangenten und Normalen.

§. 141.

In der VIII. Figur der VI. Tafel sey T t die Tangente in M einer beliebigen krummen Linie a M x, P M sey die Ordinate: p m sey dieser unendlichnahe: so ist nach der Lehre der Differentialrechnung, und nach (§. 37. Geom.) $Mr = dx$, $rm = dy$: also $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Nun ist das unendlichkleine Dreyeck M r m ∽ M P T, und auch ∽ M P Q, weil das rechtwinklichte Dreyeck T M Q von der Perpendikulär P M in zwey ähnliche abgetheilt wird. (§. 47. a.) Folglich ist

I. $rm : rM = PM : PT$

d. i. $dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$

II. $rm : Mm = PM : MT$

$$dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = y : \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$$

III. $rM : rm = PM : PQ$

$$dx : dy = y : \frac{ydy}{dx}$$

IV. $Mr : Mm = MP : MQ$

$$dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = y : \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$$

a) Es ist also I. das Differential der Subtangente $\frac{ydx}{dy}$

der Tangente $y\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$

der Subnormal $\frac{ydy}{dx}$

der Normal $y\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$

b) Wird nun die Gleichung einer krummen Linie differentirt, dx gesucht, und beyde Glieder der Gleichung mit $\frac{y}{dy}$ multiplizirt: so wird sich der wahre Werth der Subtangente herstellen. Eben so findet man die Subnormal, wenn dy gesucht, und dann beyderseits mit $\frac{y}{dx}$ multiplizirt wird.

 §. 142.

§. 142.

Aufg. 1) Die Subtangente, 2) die Subnormal der Parabel finden.

Aufl. des 1) $ax = y^2$

ist diff. $a\,dx = 2y\,dy$

$:a$ $\quad dx = \frac{2y\,dy}{a}$

$\times \frac{y}{dy}$ $\quad \frac{y\,dx}{dy} = \frac{2y^2\,dy}{a\,dy} = \frac{2y^2}{a}$

$= \frac{2ax}{a} \quad = 2x$

d. i. die Subtangente ist der doppelten Abscisse AP gleich.

Aufl. des 2)

Weil $\quad y^2 = ax$

und $\quad 2y\,dy = a\,dx$

ist $:2y$ $\quad dy = \frac{a\,dx}{2y}$

nach III. $\times \frac{y}{dx}$ $\quad \frac{y\,dy}{dx} = \frac{ay\,dx}{2y\,dx} = \frac{1}{2}a$. oder die Subnormal gleichet dem halben Parameter.

Anmerk. Aus der einmal gefundenen Subtangente TP, und der ohnehin schon bekannten Ordinate PM läßt sich nun nach der Vorschrift des pythagorischen Lehrsatzes die Tangente TM als die Hypothenus des rechtwinklichten Dreyeckes finden. Eben dieß gilt von der Normal oder PM. Man kann sie aber auch also suchen. Die Formel des Differentials der Tangente ist

$$= y\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$$

quadrirt $= y^2 \frac{(dx^2 + dy^2)}{dy^2}$

in der Parabel ist $dx = \frac{2ydy}{a}$

auch quadr. $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2}$

also $y^2 \times \frac{4y^2dy^2}{a^2dy^2} + \frac{dy^2}{dy^2} = y^2\left(\frac{4y^2}{a^2} + 1\right)$

subst. a x $= ax1\left(\frac{4ax}{a^2} + 1\right)$

$= \frac{4a^2x^2}{a^2} + ax = 4x^2 + ax.$

Doch wird sie weit bequemer nach der obigen Art bestimmt.

§. 143.

Aufg. 1) Die Subtangente der Elipse, 2) der Hyperbel finden.

Aufl. des 1) In der Elipse ist

$$ax - \frac{ax^2}{b} = y^2$$

Diff. $a dx - \frac{2axdx}{b} = 2ydy$

×b $abdx - 2axdx = 2bydy$

oder $dx \times (ab - 2ax) = 2bydy$

:ab—2ax $dx = \frac{2bydy}{ab - 2ax}$

$\times \frac{y}{dy}$ $\frac{ydx}{dy} = \frac{2by^2dy}{(ab - 2ax) \times dy}$

$= \frac{2by^2}{ab - 2ax}$

Da

Da nun $y^2 = ax - \frac{ax^2}{b}$; so ist

$$\frac{2by^2}{ab - 2ax} = \frac{2abx}{ab - 2ax} - \frac{2abx^2}{ab^2 - 2abx}$$

$$= \frac{2bx}{b - 2x} - \frac{2x^2}{b - 2x} = \frac{2bx - 2x^2}{b - 2x}$$

die Subtangente der Elipse.

Aufl. des 2) Weil hier

$$ax + \frac{ax^2}{b} = y^2$$

so wird $$adx + \frac{2axdx}{b} = 2ydy$$

und endlich nach obiger Verfahrungsart die Subtangente der Hyperbel

$$\frac{2bx + 2x^2}{b + 2x}.$$

Anmerk. Weil im Zirkel $y^2 = ax - x^2$, oder auch $= bx - x^2$: so kömmt für die Subtangente desselben auch $\frac{2bx - 2x^2}{b - 2x}$ heraus: wenn man daher auf der Achse der Elipse einen Zirkel beschreibt, so werden die Tangente dieses Zirkels und der Elipse in einem und eben demselben Punkte der Achse zusammenfallen. Für die Hyperbel zwischen den Aßymtoten ist

$$xy = a^2$$

diff. $$xdy + ydx = o$$

$$ydx = -xdy$$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{-xdy}{dy}$$

also $$PT = -x = -AP.$$

So wie bisher mit der Subtangente geschehen, muß man auch mit der Bestimmung der Subnormalen verfahren.

Von

Von der logarithmischen Linie.

§. 144.

Wenn man die Linie a P (Tab. VIII. Fig. VII.) in gleiche Theile a b, b C, C P abtheilet, und auf den Punkten a, b, C, P die senkrechten a K, b L, C M, P N so errichtet, daß sie in einer geometrischen Proportion aufeinander folgen: so folgt aus §. 129. b. der Arithmetik, daß die Abscissen der Linie a P die Logarithmen der entsprechenden Ordinaten sind. D. i. der Logarithme von a K ist = o, von b L = a b, von C M = a C = 2 a b ꝛc.

Zieht man nun über die Spitze der Ordinaten eine Linie K L M N fort: so heißt diese eine logarithmische Linie.

2) Macht man ferner mit den Ordinaten M C, N P die gleichweit abstehenden und unendlichnahen m c, n p, und die kleine Normalen n r, m R: so ist, weil in jeder geometrischen Progreßion die gleichweit abstehenden Glieder in Proportion stehen,

$$m\,c : M\,C = n\,p : N\,P$$

$$M\,r : M\,C = N\,R : N\,P$$

d. i. wenn $M\,C = y$, $N\,P = Z$

$$dy : y = dZ : z$$

Da nun dieß von allen Theilen der logarithmischen Linie wahr ist: so ist das Verhältniß $dy : y = \frac{dy}{y}$

durch=

durchaus beständig, und = einem Differential, welches man daher das logarithmische Differential nennt.

3) Da nun ein jeder beständiger Unterschied Pp = dx so eine Größe seyn kann, wenn sie mit einer andern beständigen = a dividirt wird: so ist

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{a} = dx$, wenn $a = 1$, die Gleichung der logarithmischen Linie.

a) Weil diese keine algebraische Gleichung ist, sondern Differentiale enthält: so ist die logarithmische Linie keine algebraische, sondern eine transzendentische Linie.

b) Die Subtangente der logarithmischen Linien ist selbst $= \frac{y\,dx}{dy}$

denn weil $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{a}$

ist × a $\frac{a\,dy}{y} = dx$

$: \frac{dy}{y}$ $a = \frac{y\,dx}{dy}$

die Subtangente aT ist also in allen Punkten beständig, und eben dieselbe.

c) Die Subnormal wird,

weil $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{a}$

× y $dy = \frac{y\,dx}{a}$

$\times \frac{y}{dx}$ $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{y^2\,dx}{a\,dx} = \frac{y^2}{a}$.

Von

Von dem Krümmungsstrale.

§. 145.

Es sey (Tab. VIII. Fig. VIII.) a K die Achse einer krummen Linie a x. M P, m p seyen zwo unendlichnahe Ordinaten; c M, c m zween Stralen des berührenden Zirkels, dessen Mittelpunkte in c ist: so wird der Bogen M m der Linie a x, mit dem des berührenden Zirkels einerley seyn. Macht man nun aus c einen unendlichkleinen Bogen H o, und M r mit der Achse gleichlaufend: so ist $Mr = Pp = dx$, $mr = dy$; $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Da aber H o und M m, so auch H h, M r parallel; die Winkel bey o und r rechte sind, weil H o auf c m senkrecht stehet: ist das

$$\triangle Hoh \backsim \triangle Mrm$$

also $$Mm : Mr = Hh : Ho$$

d.i. $$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = Hh : \frac{Hh \times dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$$

aber $$Hh = d\left(x + \frac{ydy}{dx}\right)$$

d. i. H h ist das Differential von der Abscisse $ap = x +$ der Subnormal $PH = \frac{ydy}{dx}$ (§. 141. a.). Differentirt man wirklich: so ist

$$d\left(x + \frac{ydy}{dx}\right) = dx + \frac{ydxd^2y + dxdy^2 - ydyd^2x}{dx^2} = Hh$$

Wird

Wird jetzt dieses in $\frac{Hh \times dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ für Ho substituirt: so entstehet

$$Ho = \frac{dx^3 + ydxd^2y + dxdy^2 - ydyd^2x}{dx\sqrt{(dx^2+dy^2)}}.$$

Da aber auch $Hch \backsim Mcm$: so ist

$$Mm : Ho = Mc : Hc$$

also

$$Mm - Ho : Mm = Mc - Hc : Mc$$
$$= MH : Mc$$

folgl.

$$Mc = \frac{MH \times Mm}{Mm - Ho}.$$

Aber weil die Normal $MH = \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$ (§. 141. a.) wird

$$\frac{MH \times Mm}{Mm - Ho} = \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)} \times \sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$$

$$:\left(\sqrt{dx^2+dy^2} - \frac{dx^2+ydxd^2y+dxdy^2-ydydx}{dx\sqrt{(dx^2+dy^2)}}\right)$$

$$= \frac{(dx^2+dy^2) \times \sqrt{\overline{dx^2+dy^2}}}{dyd^2x - dxd^2y}$$

$$= \frac{(dx^2+dy^2) \times \sqrt{\overline{dx^2+dy^2}}}{-dxd^2y} = MC$$

Falls man nämlich dx als beständig ansieht, und $d^2x = 0$ setzt.

Anmerk. Dieses wäre also das Differential für die Länge des Krümmungsstrales, dessen Zirkel die Linie ax in Mm berühren würde. Doch, gleichwie die Tangente und Normal aus der Subtangente und Subnormal, so wird auch der Stral der Krümmung aus dem Koradius MQ viel leichter bestimmt. Die nachstehende Formel enthält das Differential für diesen.

§. 146.

§. 146.

Es ist das Dreyeck Mrm ∽ △ MQc. Denn weil cM als der Radius des berührenden Zirkels, auf Mm als einen Theil der Tangente senkrecht ist: so ist das Dreyeck Mmu rechtwinklicht, und wird daher von der auf Mu senkrechten Mr in 2 ähnliche getheilt. Also ist

$$\triangle Mrm \backsim \triangle Mru$$

auch ist $\triangle Mru \backsim \triangle MQc$

weil der Winkel r = Q, als zween rechte, und die Winkel bey u Scheitelwinkel sind: folglich ist auch

$$\triangle Mrm \backsim \triangle MQc$$

daher $Mm : Mr = Mc : MQ$

$$\sqrt{dx^2+dy^2} : dx = \frac{(dx^2+dy^2)\times\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy\,d^2x - dx\,d^2y} : MQ$$

$$MQ = \frac{dx\times(dx^2+dy^2)\times\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2}\,(dy\,d^2x - dx\,d^2y)}$$

$$= \frac{dx\times(dx^2+dy^2)}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}$$

Setzt man nun dx beständig: so wird endlich das Differential des Koradius

$$MQ = \frac{dx^2+dy^2}{-d^2y}.$$

a) Sucht man nun aus der Gleichung einer krummen Linie, dy, dy^2 und ddy: stellt dann das Differential $\frac{dx^2+dy^2}{-d^2y}$ vollkommen her: so ist der Koradius derselben gefunden.

§. 147.

§. 147.

Aufg. Den Stral der Krümmung in der Parabel finden.

Aufl. Weil in der Parabel

$$2ydy = adx \text{ (§. 142.)}$$

also $$dy = \frac{adx}{2y}.$$

Quadr. $$dy^2 = \frac{a^2dx^2}{4y^2}.$$

Nun giebt $dy = \frac{adx}{2y}$, wenn es differentirt, und dx beständig gesetzt wird,

$$ddy = \frac{-adxdy}{2y^2}$$

subst. $\frac{adx}{2y}$ $$= \frac{-a^2dx^2}{4y^3}$$

also $\frac{dx^2+dy^2}{-d^2y}$ $$= \left(dx^2 + \frac{a^2dx^2}{4y^2}\right) \times \frac{4y^3}{a^2dx^2}$$

$$= \frac{4y^3dx^2}{a^2dx^2} + \frac{4a^2y^3dx^2}{4a^2y^2dx^2}$$

$$= \frac{4y^3 + a^2y}{a^2} = y + \frac{4y^3}{a^2}$$

$y = \sqrt{ax}$ also $$= \sqrt{ax} + \frac{4ax\sqrt{ax}}{a^2}$$

$$= \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}.$$

Da nun, wenn man die Tangente M m bis T verlängert, wo T P die Subtangente $= 2x$ wird (§. 142. 1.) und T Q auf M T senkrecht macht,

TMP ∽ TQP (weil TP auf MQ senkrecht ist.)

so ist $MP : TP : PQ$

$y : 2x : PQ$

also $PQ = \frac{4x^2}{y}$

$= \frac{4x^2}{\sqrt{ax}}$

$x\sqrt{ax}$ $= \frac{4x^2\sqrt{ax}}{ax} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$

also $MP + PQ = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a} = MQ$

= dem Koradius.

Anmerk. Dieses soll genug seyn, um nur eine Anwendung der Differentiodifferentialen gezeigt zu haben.

II. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die krummen Linien.

Berechnung der körperlichen Innhalte und der Oberflächen.

Anmerk. Die Flächeninnhalte oder Quadraturen der Kegelschnitte sind schon in der Arithmetik §. 170. u. ff. gesucht worden. Es wird daher die Art dieses zu verrichten hier durchgehends vorausgesetzt. Auf gleiche Weise ist uns $\frac{py^2 dx}{2r}$ als das Element oder Differential des Körpers, und $\frac{py}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

y^2) als das Differential der Oberfläche, sowohl als die Art selbe anzuwenden, schon aus §. 60. und §. 64. bekannt.

§. 148.

1) Aufg. Den körperlichen Innhalt eines parabolischen Afterkegels finden, welcher entsteht, wenn sich eine Parabel aMd um ihre Achse ab drehet (Tab. VIII. Fig. IX.)

Aufl. Es ist $y^2 = ax$

$$\times \frac{pdx}{2r} \qquad \frac{py^2dx}{2r} = \frac{apxdx}{2r}$$

Integr. $$S\frac{py^2dx}{2r} = \frac{apx^2}{4r}$$

$$= \frac{pxy^2}{4r} = \frac{py^2}{2r} \times \tfrac{1}{2}x.$$

D. i. der dichte Innhalt eines solchen Kegels gleichet der halben Grundfläche, welche $\frac{py^2}{2r}$ ist, mit der halben Höhe multiplizirt.

a) Eine Walze, ein solcher Afterkegel, und ein wahrer Kegel von gleicher Höhe und Grundlinie verhalten sich daher, wie $\frac{py^2}{2r} \times x$, $\frac{py^2}{2r} \times \frac{x}{2}$, $\frac{py^2}{2r} \times \frac{x}{3}$ oder wie 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

b) Zieht man vom Innhalt der Walze, die aus dem Rechtecke abcd entstehet, den Innhalt des parabolischen Afterkegels ab: so ist $\frac{py^2x}{2r} - \frac{py^2x}{4r} = \frac{py^2x}{4r}$ der Innhalt des Stückes ACM.

§. 149.

§. 149.

2te Aufg. Den körperlichen Innhalt einer eliptischen Sphäroide oder Afterkugel finden, welche die Bewegung einer Elipse A M m B um ihre Querachse zeugt. (Tab. VII. Fig. IV.)

Aufl. Nach §. 116. a. ist

$$y^2 = \frac{a^2 b^2 - a^2 x^2}{b^2}$$

$$\frac{p y^2 dx}{2r} = \frac{a^2 p dx}{2r} - \frac{a^2 p x^2 dx}{a r b^2}$$

$$S \frac{p y^2 dx}{2r} = \frac{a^2 p x}{2r} - \frac{a^2 p x^3}{6 r b^2}$$

weil $x = 2b$ $\quad = \frac{a^2 b p}{r} - \frac{2 a^2 b p}{6r} = \frac{4}{6} \frac{a^2 bp}{r}$

$$= \frac{2}{3} \frac{a^2 bp}{r}$$

wenn auch $a = r$ $\quad = \frac{2}{3} a b p.$

a) Ein mit der halben kleinern Achse beschriebener Zirkel wäre $= \frac{a^2 p}{2r}$, und ein Kegel von dieser Grundfläche, der die doppelte größere Achse $= a b$ für seine Höhe hätte, wäre $= \frac{2 a^2 bp}{6r} = \frac{a^2 bp}{3r}$: eine Walze von eben der Grundfläche und Höhe wäre $= \frac{a^2 bp}{r}$. Es würden sich also ein Kegel, eine eliptische Afterkugel, und eine Walze verhalten, wie $\frac{a^2 bp}{3r}, \frac{2a^2 bp}{3r}, \frac{a^2 bp}{r}$ d. i. wie $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}$ wie 1, 2, 3.

§. 150.

3te Aufg. Den Innhalt eines Afterkegels finden, der aus der Bewegung einer Hyperbel A M m (Tab. VII. Fig. VII.) um ihre Achse A p entstehet.

Aufl. $y^2 = \frac{abx + ax^2}{b}$

$$\frac{py^2 dx}{2r} = \frac{abpxdx}{2br} + \frac{apx^2 dx}{2br}$$

$$S\frac{py^2 dx}{2r} = \frac{abpx^2}{4br} + \frac{apx^3}{6br}$$

$$= \frac{ap}{2br}(\tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}x^3).$$

§. 151.

4te Aufg. Den Innhalt des Körpers finden, welcher erzeugt wird, wenn sich die logarithmische Linie MK (Tab. VIII. Fig. VII.) um die gerade aP drehet.

Aufl. Nach §. 144. 2. ist in der logarithmischen Linie deren Subtangente $= a$

$$dx = \frac{ady}{y}$$

$$\frac{py^2 dx}{2r} = \frac{apy^2 dy}{2ry} = \frac{apydy}{2r}$$

$$S\frac{py^2 dx}{2r} = \frac{apy^2}{4r}.$$

Wenn r als die letzte Ordinate P N angenommen wird: so ist der Innhalt des Körpers $= \tfrac{1}{4}apr$.

§. 152.

§. 152.

4te Aufg. Die Oberfläche eines parabolischen Afterkegels bestimmen.

Aufl. $ax = y^2$

diff. $a\,dx = 2y\,dy$

:a $dx = \frac{2y\,dy}{a}$

quadr. $dx^2 = \frac{4y^2\,dy^2}{a^2}$

$\times \frac{py}{r}(dx^2 + dy^2)$

$$\frac{py}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2} = \frac{py}{r}\sqrt{\frac{4y^2\,dy^2}{a^2} + dy^2}$$

$$= \frac{py}{r}\sqrt{\frac{dy^2}{a^2}(4y^2 + a^2)}$$

$$= \frac{py\,dy}{ar}\sqrt{4y^2 + a^2}$$

Integr. $S\frac{py}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{p}{12ar} \times \sqrt{(4y^2 + a^2)}\sqrt{}$ $(4y^2 + a^2)$ durch Transformation.

a) Löset man $\frac{p}{12ar} \times (4y^2 + a^2)\sqrt{(4y^2 + a^2)}$ in eine Proportion auf: so ist

$6a : \sqrt{(4y^2 + a^2)} = \frac{p}{2r}(4y^2 + a^2) : \frac{p}{12ar}\sqrt{(4y^2 + a^2)}(4y^2 + a^2)$. D. i. $\frac{p}{12ar}\sqrt{(4y^2 + a^2)} \times (4y^2 + a^2)$ ist die 4te Proportionalgröße zu den Parameter

6mal genommen, zum Radius, und der ganzen Fläche des Zirkels, dessen Radius $= \sqrt{(4y^2 + a^2)}$ ist.

Verkehrte Methode der Tangenten.

§. 153.

Wenn man aus der gegebenen Tangente, Subtangente, so auch aus der gegebenen Normallinie, oder Subnormallinie die Natur, oder Gleichung der krummen Linie selbst suchet, wovon jene die Tangente, Subtangente ꝛc. ist. so heißt man dieses Verfahren die verkehrte Methode der Tangenten. Wir haben diese einzige Regel zu merken.

2) Man setzt den gegebenen Ausdruck der Tangente, Subtangente ꝛc. mit der allgemeinen Differentialformel (§. 141.) in eine Gleichung: so erhält man durch Uebersetzung leicht eine Differentialgleichung: wird nun diese integrirt, so wird sich die Gleichung der krummen Linie herstellen, wovon jene die Tangeute, Subtangente ꝛc. war.

§. 154.

1te Aufg. Die Subtangente einer krummen Linie sey $\frac{2y^2}{a}$: man soll die krumme Linie selbst finden.

Aufl. Das Differential der Subtangente ist $\frac{ydx}{dy}$, setzt man also mit diesem $\frac{2y^2}{a}$ in eine Gleichung: so entsteht

$$\frac{2y^2}{a}=\frac{y\,dx}{dy}$$

× dy, u. a $\qquad 2y^2\,dy = ay\,dx$

: y $\qquad 2y\,dy = a\,dx$

integr. $\qquad y^2 = ax.$

§. 155.

2te Aufg. Die Linie, deren Subtangente $= y$ ist, finden.

Aufl. $$\frac{y\,dx}{dy}=y$$

$$y\,dx = y\,dy$$

$$dx = dy$$

integr. $\qquad x = y.$ (§. 134.)

Sie ist also eine Zykloide, wo x ein Bogen des Zeugezirkels ist. Bedeutet aber x eine gerade Linie: so wäre $x = y$ die Gleichung eines gleichschenklichten Dreyeckes, als dessen Ordinaten offenbar den Abscissen gleich sind.

Anmerk. Wäre die Subtangente zwischen x und y die mittlere Proportional $= \sqrt{xy}$: so würde eben dieses herauskommen; denn

$$\frac{y\,dx}{dy}=\sqrt{xy}=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

$$y\,dx = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}dy$$

$$dx = x^{\frac{1}{2}}\frac{y^{\frac{1}{2}}}{y}dy$$

$$= x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$:x^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$x^{-\frac{1}{2}} dx = y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$\text{integr:} \qquad x^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$$

$$x = y$$

§. 156.

3te Aufg. Die Subtangente einer Linie ist zu a — x, und y die 3te Proportionalgröße: die Linie selbst finden.

Aufl. Da nach gegebener Bedingniß

$$a - x : y ; \frac{y\,dx}{dy}$$

so ist $\frac{a\,y\,dx - x\,y\,dx}{dy} = y^2$ { Wenn man äußere und mittlere mult.

$x\,dy$ u. $:y$ $\quad a\,dx - x\,dx = y\,dy$

Integr. $\quad ax - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$

$x^2 \quad 2ax - x^2 = y^2$

Die Gleichung eines Zirkels, dessen Durchmesser 2 a, und die Abszisse x ist.

Anmerk. Ist die Subtangente die 3te Proportional zu a, und y, also $= \frac{y^2}{a}$: so wird $y^2 = 2ax$ d. i. eine Parabel, deren Parameter = 2 a ist.

§. 157.

4te Aufg. Die Linie finden, deren Subnormal eine beständige Größe = a ist.

Aufl.

Aufl. Das Differential der Subnormal ist

$$\frac{y\,dy}{dx}\ (\text{§. 141. III.})\ \text{folgl:}$$

$$\frac{y\,dy}{dx} = a$$

$$y\,dy = a\,dx$$

Integr. $$y^2 = 2ax$$

Eine Parabel, deren Parameter der doppelten Subnormal gleichet.

Anmerk. Wenn die Subnormal eine Linie $a - x$ ist: so kömmt $y^2 = 2ax - x^2$ die obige Gleichung des Zirkels heraus.

§. 158.

So wie aus der Tangente, Subtangente, läßt sich auch aus dem Bogen, der Fläche, oder dem körperlichen Innhalte, welcher aus der Bewegung einer krummen Linie entstehet, die Linie selbst finden. Man vergleicht nämlich 1) im ersten Falle den Ausdruck des gegebenen Bogens mit dem allgemeinen Differential des Bogens Mm $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ im zweyten die gegebene Fläche oder Quadratur mit dem Differenzial $y\,dx$: im 3ten den Ausdruck des Körpers mit dem Differential $\frac{p\,y^2\,dx}{2r}$, 2) Integrirt mann wie oben, falls man die krumme Linie aus dem Bogen sucht: sucht man sie aber aus der Quadratur, oder dem körperlichen Innhalt: so muß das Differential des gegebenen Ausdrucks von diesen mit dem allgemeinen Differential vergleichen, und dann nur durch gemeines Kalkuliren die Gleichung gesucht werden.

§. 159.

1te Aufg. Die krumme Linie finden, wovon der Bogen $= S \frac{dy}{a} \sqrt{(4y^2 + a^2)}$

Aufl. $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dy}{a} \sqrt{(4y^2 + a^2)}$

Quadr. $dx^2 + dy^2 = \frac{dy^2}{a^2} (4y^2 + a^2)$.

$\times a^2$ $a^2 dx^2 + a^2 dy^2 = 4y^2 dy^2 + a^2 dy^2$

$- a^2 dy^2$ $a^2 dx^2 = 4y^2 dy^2$

$\sqrt{}$ ausgez. $a dx = 2y dy$

Integr. $ax = y^2$ die Gleich. der Parabel.

§. 160.

2te Aufg. Die krumme Linie finden, wovon die Fläche $= \frac{2}{3} x \sqrt{ax}$.

Aufl. Wenn $\frac{2}{3} x \sqrt{ax}$ differentirt wird, so ist

$$d\left(\tfrac{2}{3} x \sqrt{ax}\right) = d\left(\tfrac{2}{3} \sqrt{} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = dx \sqrt{ax}$$

also $dx \sqrt{ax} = y dx$

$: dx$ $\sqrt{ax} = y$

wiederum die Gleichung der obigen Parabel.

Anmerk. Wenn eine Quatratur $= \frac{ex^2}{2d}$, und ihr Element $= \frac{exdx}{d}$ mit dem allgemeinen der Quadratur verglichen wird: so ist

$$\frac{exdx}{d} = ydx$$

$\frac{ex}{d} = y$ eine gerade Linie (§. 99. b)

§. 161.

3te Aufg. Die Quadratur sey

$$s\,dx \surd (bx+x^2)\frac{\surd a}{\surd v}$$

Aufl. Wenn wir wieder das Element nehmen: so ist

$$dx \surd (bx+x^2)\frac{\surd a}{\surd b} = y\,dx$$

$$dx \surd (bx+x^2)\surd a = y\,dx \surd b$$

Quadr. $(dx^2\,bx+x^2)\,a = y^2\,b\,dx^2$

$:dx^2$ $abx+ax^2 = by^2$

$$ax+\frac{ax^2}{b} = y^2$$

Die Gleichung der Hyperbel nach der Achse genommen.

§. 162.

4te Aufg. Die krumme Linie finden, welche einen Körper $= \frac{apx^2}{4r}$ erzeugen würde.

Aufl. Nehmen wir von diesem das Differential: so ist

$$\frac{apxdx}{2r} = \frac{py^2\,dx}{2r}$$

$: \frac{pdx}{2r}$ $ax = y^2$

§. 163.

5te Aufg. Die krumme Linie finden, von welcher der Körper $= \frac{1}{2}px^2 - \frac{px^3}{6r}$.

Aufl.

Aufl. $$p x d x - \frac{p x^2 d x}{2r} = \frac{p y^2 d x}{2r}$$

$\times 2r$ $$2 p r x d x - p x^2 d x = p y^2 d x$$

$: p d x$ $$2 r x - x^2 = y^2$$

d. i. die krumme Linie ist ein Zirkel, der erzeugte Körper aber eine Kugel, und der Radius von beyden $= r$.

Anmerk. Setzt man den Innhalt des erzeugten Körpers $= s$ $\left(p x d x - \frac{p x^2 d x}{2r}\right)$ so zeigt sich ebendieselbe Gleichung des Zirkels.

Rektifizirung der krummen Linien.

§. 164.

Eine krumme Linie rektifiziren, heißt nichts anders, als eine gerade finden, der die krumme der Länge nach gleich sey.

2) Daß der unendlichkleine Bogen M m (Tab. VIII. Fig. VI.) $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ Das Differential, oder Element eines Bogens sey, ist uns wieder aus der Arithmetik (§. 153. Anm.) bekannt. Wenn man daher $d x^2$, oder $d y^2$ aus der Natur einer krummen Linie sucht, das ganze Element $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ in der Gleichung ergänzt, und dann integrirt, so ist der Bogen a M oder die krumme Linie der gewählten Gleichung gefunden. Folgende Beyspiele werden die Sache wieder deutlich machen.

§. 165.

1te Aufg. Die Parabel rektifiziren.

Aufl. $$a x = y^2$$
$$a d x = 2 y d y$$

$$dx = \frac{2y\,dy}{a}$$

$$dx^2 = \frac{4y^2\,dy^2}{a^2}$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{\left(\frac{4y^2\,dy^2}{a^2}+dy^2\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4y^2dy^2+a^2dy^2}{a^4}\right)}$$

$$= \frac{dy}{a}\sqrt{(a^2+4y^2)}$$

löst man nun $\sqrt{(a^2+4y^2)}$ in eine unendliche Reihe auf, so entstehet $a+\frac{2y^2}{a}-\frac{2y^4}{a^3}+\frac{4y^6}{a^5}-\frac{10y^8}{a7}$ ---

$\times\frac{dy}{a}$ $dy+\frac{2y^2dy}{a^2}-\frac{2y^4dy}{a^4}+\frac{4y^6dy}{a^6}-\frac{10y^8dy}{a^8}$ --

Integ. $am = y+\frac{2y^3}{3a^2}-\frac{2y^5}{5a^4}+\frac{4y^7}{7a^6}-\frac{10y^9}{9a^7}$ ---

Setzt man $a=1$: so ist endlich

$$am = y\,(1+\tfrac{2}{3}y^2-\tfrac{2}{5}y^4+\tfrac{4}{5}y^6-\tfrac{10}{9}y^8 \text{ --}$$

§. 166.

2te Aufg. Einen Zirkel rektifiziren.

Aufl. Es sey in der Gleichung $2rx-x^2=y^2$ der Radius $=1$:

so ist $$2x-x^2=y^2$$

$$2dx-2xdx=2ydy$$

$$dx=\frac{ydy}{1-x}$$

dx

$$dx^2 = \frac{y^2\,dy^2}{1-2x+x^2} = \frac{y^2\,dy^2}{1-y^2} \text{ weil } (2x+x = -y^2)$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{y^2\,dy^2}{1-y^2} + dy^2$$

$$= \frac{y^2\,dy^2 + dy^2 - y^2\,dy^2}{1-y^2} = \frac{dy^2}{1-y^2}$$

weil nun $\frac{dy^2}{1-y^2} = dy^2 \times (1-y^2)^{-1}$ so wird nach der allgemeinen Formel

$$\surd(dx^2 + dy^2) = \surd\overline{dy^2 \times (1-y^2)^{-1}}$$

$$\surd(1-y^2)^{-1} = 1 + \tfrac{1}{2}\,y^2 + \tfrac{3}{8}\,y^2 + \tfrac{5}{16}\,y^6 + ---$$

$\times\,dy$ $\quad dy + \tfrac{1}{2}y^2\,dy + \tfrac{3}{8}y^4\,dy + \tfrac{5}{16}y^6\,dy ---$

Integ. $\quad y + \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{3}{40}y^5 + \tfrac{5}{112}y^7 ---$

oder $\quad y \times (1 + \tfrac{1}{6}y^2 + \tfrac{3}{40}y^4 + \tfrac{5}{112}y^6 ---)$

wenn nun $y = 0,5 = \sin: 30° = \frac{1}{1}$ Radius: so ist $a,5 \times 3 = 90° =$ einem Quadranten, und $0,5 \times 12 =$ einem ganzen Zirkel.

Anmerk. Wollte man den Bogen aus der Abszisse, oder dem Sinus suchen: so müßte man setzen.

$$dy^2 = \frac{(dx - x\,dx)^2}{y^2} = \frac{dx^2\,(1-x)^2}{2x-x^2} = \frac{dx^2\,(1-2x+x^2)}{2x-x^2}$$

$$\surd\overline{dx^2+dy^2} = \surd\overline{dx^2 + \frac{dx^2\,(1-2x+x^2)}{2x-x^2}} = \surd\frac{dx^2}{2x-x^2}$$

$$= dx\,(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Wird nun $(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ in eine Reihe aufgelößt; mit dx multiplizirt, und integrirt: so entsteht

$$2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6(2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40(2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{7}{3}}}{337(2)^{\frac{5}{2}}} ---$$

√2

$$\sqrt{2x} \times \left(1 + \frac{x}{6x^2} + \frac{3x^2}{40x} 2 + \frac{15x^2}{337(2)} 3 - - - \right.$$

Wenn $x = \frac{1}{2} V = \frac{1}{2}$ Radius, so wird der Bogen, welcher dem Sinus Versus entspricht $= 60° = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 1$, und $\frac{x}{2} = \frac{1}{4}$, $2\frac{x^2}{2} = \frac{1}{26}$, wodurch die obige Reihe, sich in diese verwandelt.

$$1 + \frac{1}{6(2)} 2 + \frac{40(2)^3}{3} 4 \times \frac{15(2)^2}{337} 6 - -$$

welche 6mal genommen die ganze Peripherie des Zirkels giebt.

III. Abschnitt.

Gründe der Exponentialrechnung.

§. 167.

Eine Würde eines unbekannten oder veränderlichen Exponenten heißt eine Exponentialgröße. y^x, x^x, a^y, b^z sind solche.

a) Eine Gleichung, in der sich eine Exponentialgröße befindet: wie z. B. $a^x = y$ wird daher eine Exponentialgleichung genennt, und eine Line eine Exponentiallinie, wenn sie durch eine Exponentialgleichung ausgedrückt wird.

Anmerk. Die ganze Exponentialrechnung gründet sich auf die Lehre der logarithmischen Differentialien. Man muß sich also diese wohlgeläuftig gemacht haben, um in der Differentialrechnung fortzukommen. Eben aus der Ursache, weil die Lehre der logarithmischen Differentialien hier eigentlich ihren Nutzen hat, hielt ich davor, daß sie für Anfänger auch hier am bequemsten und vortheilhaftesten stehen würde. Folgende 3 Paragraphen werden das nöthigste davon erhalten.

§. 168.

Da die Abszisse a b $= x$ (Tab. VIII. Fig. VII.) der Logarithme der Ordinate b l $= y$, und das Differential von $x = dx$: nach der Natur der logarithmischen Linie aber $dx = \frac{a\,dy}{y} = \frac{dy}{y}$ [wenn a beständig.]

so ist 1) $\frac{dy}{y} = d\,l\,y$

das Differential des Logarithme von y

2) Hingegen ist $S\frac{dy}{y} = S\,dx = x = L\,y$.

a) Es ist also $d\,l\,y = \frac{dy}{y}$; $d\,l\,x = \frac{dx}{x}$;

$d\,L\,z = \frac{dz}{z}$: umgekehrt ist $S\frac{dy}{y} = l\,y$. $S\frac{dx}{x} = l\,x$. $S\frac{dz}{z} = l\,z$, daraus dann folgende zwo Regeln folgen.

§. 169.

Eine logarithmische Größe wird differentirt, wenn der Exponent um Eins vermindert, und dann die Größe mit dem vorigen Exponenten, und dem logarithmischen Differential $\frac{dy}{y}$, oder $\frac{dx}{x}$ rc. multiplicirt wird. So ist

$$d\,l\,y^n = n\,y^{n-1}\frac{dy}{y}.$$

2) Eine logarithmische Differentialgröße zu integriren, dienet folgende Regel: wenn der Zähler der Größe

das

das Differential des Nenners, oder das Vielfache desselben, oder auch nur ein Theil davon ist: so ist auf eben diese Art der Logarithme des Nenners das Integral der Größe. Es zeigt sich dieß in folgenden Fällen, wo überall der Nenner Deutlichkeit halber y gleich gesetzt wird. So ist

$$S\frac{2xdx}{a^2+x^2} = S\frac{dy}{y} = Ly = L(a^2+x^2)$$

$$S\left(\frac{4xdx}{a^2+x^2}\right) = S\left(2\frac{dy}{y}\right) = 2ly = 2l(a^2+x^2)$$

$$S\left(\frac{xdx}{a^2+x^2}\right) = S\left(\frac{1}{2}\frac{dy}{y}\right) = \frac{1}{2}ly = \frac{1}{2}l(a^2+x^2)$$

$$S\left(\frac{mx^{n-1}dx}{a^2+x^2}\right) = S\left(\frac{mnx^{n-1}dx}{n(a^n+x^n)}\right) \text{ (wenn } a^n + x^n = y)$$

$$= S\left(\frac{m}{n}\times\frac{dy}{y}\right) = \frac{m}{n}ly = \frac{m}{n}l(a^n+x^n)$$

$$S\left(\frac{1}{2}\frac{adx-xdx}{ax-x^2}\right) = S\left(\frac{1}{2}l\frac{dy}{y}\right) = \frac{1}{2}ly = \frac{1}{2}l$$

$$(ax-x^2) = \sqrt{(ax-x^2)}$$

a) Manchmal braucht man die Substitution um integriren zu können z. B. Es sey gegeben

$$m(lx)^{m-1}dx$$

man setzt $lx = y$

so ist $d(lx) = dy$

und $m(lx)^{m-1}\frac{dx}{x} = my^{m-1}dy$

Nun ist; $Smy^{m-1}dy = y^m$

also

also weil $y = lx$ $S\, m\,(lx)^{m-1}\, dx = (lx)^m$

b) Eben so sey in $n\, m\,(lx^m)^{n-1} \frac{dx}{x}$

$$x^m = y$$

so ist $\quad mx^{m-1}\, dx = dy$ und $lx^m = ly$

$$dx = \frac{dy}{mx^{m-1}}$$

also wird $n\, m\,(lx^m)^{n-1} \frac{dx}{x} = n\,(ly)^{n-1} \frac{dy}{y}$

aber $\quad S\, n\,(ly)^{n-1} \frac{dy}{y} = (ly)^n$

für ly ges. lx^m $\quad = (lx^m)^n$

c) Man setze die Differentialgröße $x\,dx \times lx$. Wei hier lx beständig: so wäre $S\,(x\,dx) \times lx = \frac{x^2}{2} \times lx$: da aber auch lx veränderlich ist: so fehlt dem Differentiale das Prod. aus der veränderlichen $\frac{x^2}{2}$, in das Differential von lx d. i. es fehlt $\frac{x^2}{2} \times d\,lx = \frac{x^2}{2} \times \frac{dx}{x}$: das vollständige Differential wäre daher

$$x\,dx \times lx + \frac{x^2}{2} \times \frac{dx}{x}$$

dessen Integ. $S\,x\,dx \times lx + \frac{x^2}{2} \times \frac{dx}{x} = S\,x\,dx \times dx$

$$+ S\left(\frac{x^2}{2} \times \frac{dx}{x}\right) = \frac{x^2}{2}\, lx$$

also das Int. von $x\,dx \times lx = \frac{x^2}{2}\, lx - S\left(\frac{x^2}{2} \times \frac{dx}{x}\right)$

=

$$= \frac{x^2}{2} lx - S\frac{x\,dx}{2} = \frac{x^2}{2} lx - \frac{x^2}{4}.$$

d) Es ist $dL(1+y) = \frac{dy}{1+y}$, und wenn man wirklich dividirt (§. 44 und 169. Arithm.)

$$\frac{dy}{1+y} = dy - y\,dy + y^2\,dy - y^3\,dy + y^4\,dy \ldots$$

daraus das Integral oder $L(1+y)$ entsteht $S\frac{dy}{1+y}$ $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - - -$

§. 170.

1. Aufg. Eine krumme Linie finden, die für ihre Tangente die doppelte Abszisse $= 2x$ hat.

Aufl. $2x = \frac{y\,dx}{dy}$ (§. 141. a.)

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$$

Da nun $\frac{dy}{y}$ das logarithmische Differential, und die beständige a ihre Subtangente ist: so wird, wenn man a ersetzt

$$\frac{a\,dy}{y} = \frac{dx}{2x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2ax}$$

Integr. $ly = \frac{1}{2}Lax = L\sqrt{ax}$

L $y = \sqrt{ax}$

Anmerk. Verlangt man eine Linie, wovon die Quadratur $= \frac{2}{3}xy$ ist: so erhält man eben diese Parabel: denn

$$\frac{2}{3} x y = y d x$$
$$\frac{2}{3} x d y + \frac{2}{3} y d x = y d x$$
$$\frac{2}{3} x d y = \frac{1}{3} y d x$$
$$2 x d y = y d x$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$$

wodurch auch wieder $y = \sqrt{a x}$ heraus kömmt.

Aus den bisherigen sieht man leicht ein, daß man $\frac{dy}{y}$ nicht nach der gewöhnlichen Methode (Arithm. §. 167.) integriren könne: denn es würde alsdann $\frac{y^0}{0} = 0$ entstehen, welches ungereimt wäre, indem $\frac{dy}{y} = 0$ ist: sondern es muß das Integral nur in der Natur der logarithmischen Linie gesucht werden: $\frac{dy}{y}$ kann daher als kein Differential einer Potenz eines veränderlichen Exponenten betrachtet werden: Eben so kann das Integral von $\frac{dy}{y}$ keine Potenz weder mit einem ganzen, noch gebrochenen Exponenten von y angesehen werden. (S. Kästners Analysis des Unendlichen 218.) Mit diesen Vorbereitungen versehen, werden wir das, was von der Exponentialrechnung folgt, leicht verstehen.

§. 171.

Da nun eine Exponentialgröße $z^x = x l z$: wovon x und l z Faktorn sind: das Differential von l z aber $\frac{dz}{z}$: so ist nach §. 155. Arithm.

$$d(z^x) = d(x l z) = d x l z + x \frac{dz}{z}.$$

a) Weil $d x l z + x \frac{dz}{z}$ ein logarithmisches Differential ist, so wird es, wenn man setzt

$$z^x = y.$$

$$lz\,dx + x\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}$$

$\times y$ $$ylz\,dx + yx\frac{dz}{z} = dy$$

alſo $$z^x lz\,dx + xz^x\frac{dz}{z} = dy$$

oder $$z^x lz\,dx + xz^{x-1}\,dz = dy.$$

b) Im Gegentheil ſieht man wohl, daß das Integral, oder

$$S\,dx\,lz + x\frac{dz}{z} = z^x$$

ſo auch $$Sz^x lz\,dx + xz^{x-1}\,dz = z^x$$ ſeyn müße.

§. 172.

Das Integral von $x^x\,dx$, wenn $x = 1 + y$ geſezt wird, iſt

$$y + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{8}y^4 + \tfrac{1}{15}y^5 + \tfrac{1}{72}y^6 ---$$

Beweis: Weil $x = 1 + y$

ſo iſt $x^x\,dx = (1+y)^{1+y}\,dy$

nun ſey $(1+y)^{1+y} = 1 + v$

ſo iſt $(1+y)\,l(1+y = L(1+v)$

oder nach §. 169. &c.

$$(1+y).(y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{5}y^5 ---)$$
$$= v - \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{3}v^3 - \tfrac{1}{4}v^4 + \tfrac{1}{5}v^5 ---$$

multiplicirt man in der erſten Reihe wirklich mit $1 + y$, ſo werden folgende daraus

$$y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{5}y^5 ---$$
$$y^2 - \tfrac{1}{2}y^3 + \tfrac{1}{3}y^4 - \tfrac{1}{4}y^5 ---$$

$$y + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{1}{12}y^4 - \tfrac{1}{10}y^5 - - -$$

Folglich wird $y + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{1}{12}y^4 - \tfrac{1}{20}y^5 - -$

$$= v - \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{3}v^3 - \tfrac{1}{4}v^4 + \tfrac{1}{5}v^5 - - -$$

um nun v durch y auszudrücken, sey

$$v = y + my^2 + ny^3 + py^4 + qy^5 - - -$$

suche dann v^2, v^3 ꝛc. indem man nach dem binomischen Lehrsaze die Reihe $y + my^2$ ꝛc. erhebt, und seze die gleichen Würden von y immer untereinander.

$$\begin{aligned}
v &= y + my^2 + ny^3 + py^4 + qy^5 - - \\
\text{so ist } v^2 &= \phantom{y+{}} y^2 + 2my^3 + m^2y^4 + 2mny^5 \\
& + 2ny^4 + 2py^5 - - \\
v^3 &= \phantom{y^2 + 2my^3 +{}} y^3 + 3my^4 + m^2y^5 \\
& + 3ny^5 - - \\
v^4 &= \phantom{y^2 + 2my^3 + m^2y^4 +{}} y^4 + 4my^5 - - \\
v^5 &= y^5 - -
\end{aligned}$$

Wenn man nun nach der Vorschrift der Reihe von v, v^2 mit $-\tfrac{1}{2}$, v^3 mit $\tfrac{1}{3}$ ꝛc. multiplicirt; die Reihe $-(y + \tfrac{1}{2}y^2$ ꝛc. mit verkehrten Zeichen daruntersezt: so werden die untereinander stehenden Grössen einander vollkommen aufheben, und dadurch die Werthe von den Coefficienten der y, y^2, y^3 ꝛc. oder von m, n, p, und q also gefunden:

$$\begin{aligned}
v &= y + my^2 + ny^3 + py^4 + qy^5 - - - \\
-\tfrac{1}{2}v^2 &= -\tfrac{1}{2}y^2 - my^3 - \tfrac{1}{2}m^2y^4 - mny^5 - - - \\
&\phantom{= -\tfrac{1}{2}y^2 - my^3} - ny^4 - py^5 \\
\tfrac{1}{3}v^3 &= \phantom{-\tfrac{1}{2}y^2 -{}} \tfrac{1}{3}y^3 + my^4 + m^2y^5 - - - \\
&\phantom{= \tfrac{1}{3}y^3 + my^4 + m^2} + ny^5 \\
-\tfrac{1}{4}v^4 &= \phantom{-\tfrac{1}{2}y^2 - my^3} - \; -\tfrac{1}{4}y^4 - my^5 - - -
\end{aligned}$$

$v^5 =$

$$v^5 = \qquad y^5 - - -$$

$$-y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{6}y^3 - \tfrac{1}{12}y^4 + \tfrac{1}{20}y^5 - - -$$

also $1 - 1 = 0 \qquad 1 = 1$

$m - \frac{2}{2} = 0 \qquad m = 1$

$n - m + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0 \qquad n = \frac{1}{2} - - -$

$p - \frac{1}{2}m^2 - n + m - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 0 \quad p = \frac{1}{3}$

$q - mn - p + m^2 + n + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = 0 \quad q = \frac{1}{12}$

folglich $v = y + y^2 + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{12}y^5 - - -$

$$1 + v = 1 + y + y^2 + \tfrac{1}{2}y^3 + \tfrac{1}{3}y^4 + \tfrac{1}{4}.\ y^5 - - -$$

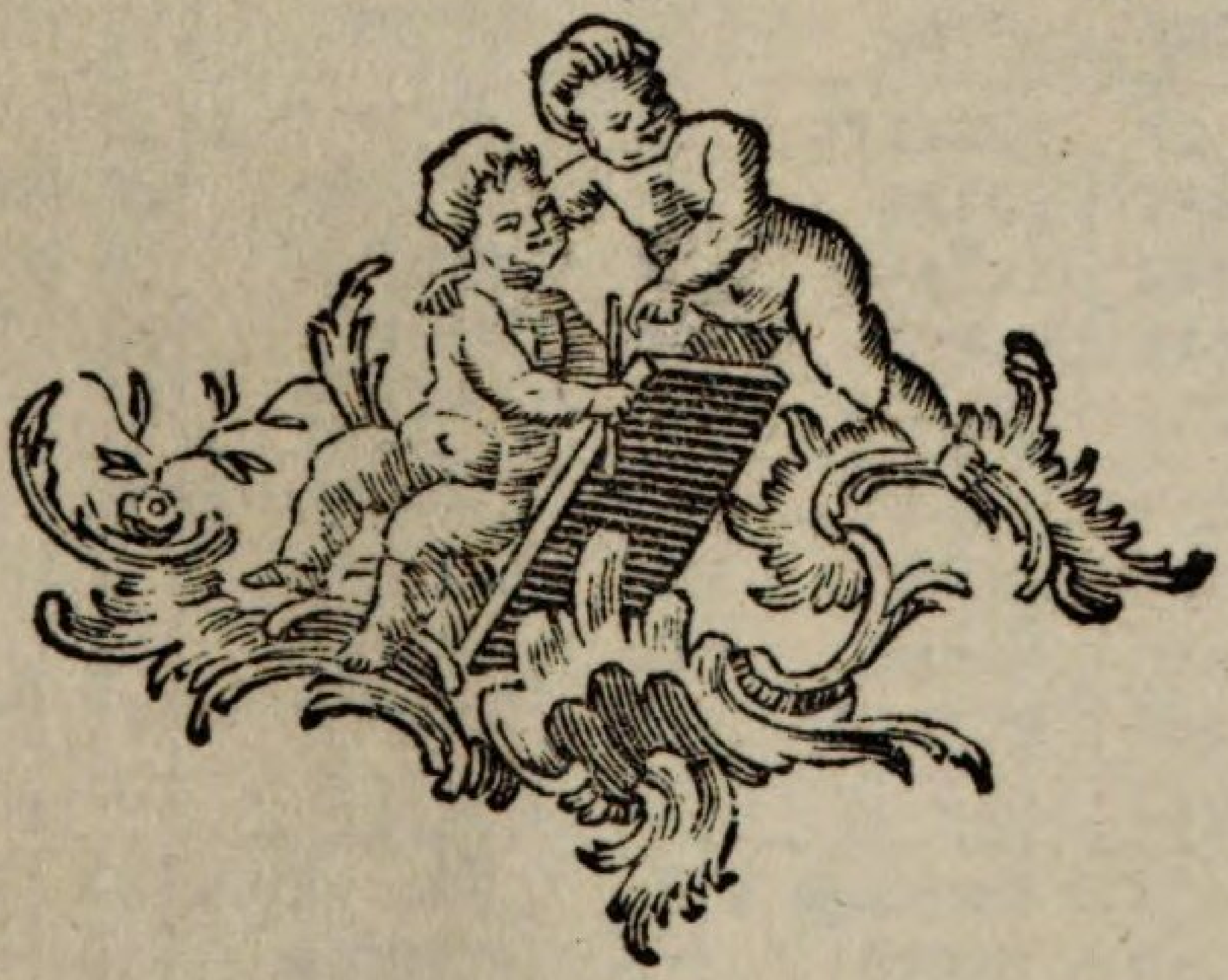
$$= (1+y)^{1+y}$$

$$(1+y)^{1+y}dy = dy + y\,dy + y^2\,dy + \tfrac{1}{2}y^3\,dy + \tfrac{1}{3}y^4\,dy + \tfrac{1}{4}y^5\,dy - - -$$

$$S(1+y)^{1+y}dy = y + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{8}y^4 + \tfrac{1}{15}y^5 + \tfrac{1}{72}y^6 - - -$$

Ein mehreres kann nun von dieser Rechnung, welche wohl der sinnreicheste Theil der Differentialrechnung ist, und vermuthlich den Joh. Bernoulli zum Erfinder hat, nicht gesagt werden. Uebrigens empfehle ich hier, wie in der ganzen höheren Mathematik überhaupt Karstens, und Kästners Lehrbücher, in welchen sie sowohl Alles gründlichst abgehandelt, als auch andere Arten von Auflösungen der lezten Aufgaben finden werden.

Tafeln
der
Logarithmen,
sowohl der
natürlichen Zahlen,
als der
Sinus und Tangenten.



München 1780.

Gedruckt bey Johann Paul Vötter, kurpfalzbaierischen Hof-Akademie und Landschaftsbuchdrucker.

Anmerk. Weil ohnedem bekannt ist, daß die Kennziffer der Logarithme von 100 bis 1000, 2 ist, so hat man sie des Raumes wegen weggelassen.

Tafel
für die
Logarithmen
der
natürlichen Zahlen von 1 bis 1000.

N. 1.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
1	0 0000000	36	1 5563025	71	1 8512583	106	0253059
2	3010300	37	682017	72	73325	107	93838
3	4771213	38	797836	73	633229	108	334238
4	6020600	39	910646	74	92317	109	74265
5	989700	40	6020600	75	750613	110	413927
6	0 7781513	41	1 6127839	76	1 8808136	111	53230
7	8450980	42	232493	77	64907	112	92180
8	9030900	43	334685	78	920946	113	0530784
9	542425	44	434527	79	76271	114	69049
10	1 0000000	45	532125	80	9030900	115	606978
11	1 0413927	46	1 6627578	81	1 9084850	116	44580
12	791812	47	720979	82	138139	117	81859
13	1139434	48	812412	83	90781	118	0718820
14	461280	49	901961	84	242793	119	55470
15	760913	50	89700	85	94189	120	91812
16	1 2041200	51	1 7075702	86	1 9344985	121	0827854
17	304489	52	160033	87	95193	122	63598
18	552725	53	242759	88	444827	123	99051
19	787536	54	323938	89	93900	124	934217
20	3010300	55	403627	90	542425	125	69100
21	1 3222193	56	1 7481[illegible]80	91	1 9590414	126	1003705
22	424227	57	558749	92	637878	127	38037
23	617278	58	634280	93	84829	128	72100
24	802112	59	708520	94	731279	129	105897
25	979400	60	81513	95	77236	130	39434
26	1 4149733	61	1 7853298	96	1 9822712	131	72713
27	313638	62	923917	97	67717	132	1205739
28	471580	63	93405	98	912261	133	38516
29	623980	64	8061800	99	56352	134	71048
30	771213	65	129134	100	2 0000000	135	303338
31	1 4913617	66	1 8195439	101	43214	136	35389
32	5051500	67	260748	102	86002	137	67206
33	185139	68	325089	103	128372	138	98791
34	314789	69	88491	104	70333	139	1430148
35	440680	70	450980	105	2 0211893	140	61280

N.141.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
141	1492191	186	2695129	231	3636120	276	4409091
142	522883	187	718416	232	54880	277	24798
143	53360	188	41578	233	73559	278	40448
144	83625	189	64618	234	92159	279	56042
145	613680	190	87536	235	710679	280	71580
146	43529	191	2810334	236	29120	281	87063
147	73173	192	33012	237	47483	282	4502491
148	1702617	193	55573	238	65770	283	17864
149	31863	194	78017	239	83979	284	33183
150	60913	195	900346	240	3802112	285	48449
151	89769	196	22561	241	20170	286	63660
152	1818436	197	44662	242	38154	287	78819
153	46914	198	66652	243	56063	288	93925
154	75207	199	88531	244	73898	289	4608978
155	903317	200	3010300	245	91661	290	23980
156	31246	201	31961	246	3909351	291	38930
157	58997	202	53514	247	26970	292	53829
158	86571	203	74960	248	44517	293	68676
159	2013971	204	96302	249	61993	294	83473
160	41200	205	3117539	250	979400	295	98220
161	68259	206	38672	251	96737	296	4712917
162	95150	207	59703	252	4014005	297	27564
163	2121876	208	80633	253	31205	298	42163
164	48438	209	3201463	254	48337	299	56712
165	74839	210	22193	255	65402	300	771213
166	2201081	211	42825	256	82400	301	85665
167	27165	212	63359	257	99331	302	4800069
168	53093	213	83796	258	4116197	303	14426
169	78867	214	3304138	259	32998	304	28736
170	304489	215	24385	260	49733	305	42998
171	29961	216	44538	261	66405	306	57214
172	55284	217	64597	262	83013	307	71384
173	80461	218	84565	263	99557	308	85507
174	2405492	219	3404441	264	4216039	309	99585
175	30380	220	24227	265	32459	310	4913617
176	55127	221	43923	266	48816	311	27604
177	79733	222	63530	267	65113	312	41546
178	2504200	223	83049	268	81348	313	55443
179	28530	224	3502480	269	97523	314	69296
180	52725	225	21825	270	4313638	315	83106
181	76786	226	41084	271	29693	316	96871
182	2600714	227	60259	272	45689	317	5010593
183	24511	228	79348	273	61626	318	24271
184	48178	229	98355	274	77506	319	37907
185	71717	230	3617278	275	93327	320	51500

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
321	5065050	366	5634811	411	6138418	456	6589648
322	78559	367	46661	412	48972	457	99162
323	92025	368	58478	413	59501	458	608655
324	105450	369	70264	414	70003	459	18127
325	18834	370	82017	415	80481	460	27578
326	32176	371	93739	416	90933	461	37009
327	45478	372	5705429	417	6201361	462	46420
328	58738	373	17088	418	11763	463	55810
329	71959	374	28716	419	22140	464	65180
330	85139	375	40313	420	32493	465	74530
331	98280	376	51878	421	42821	466	83859
332	5211381	377	63414	422	53125	467	93169
333	24442	378	74918	423	63404	468	6702459
334	37465	379	86392	424	73659	469	11728
335	50448	380	97836	425	83889	470	20979
336	63393	381	5809250	426	94096	471	30209
337	76299	382	20634	427	6304279	472	9420
338	89167	383	31988	428	14438	473	48611
339	5301997	384	43312	429	24573	474	57783
340	14789	385	54607	430	34685	475	66936
341	27544	386	65873	431	44773	476	76070
342	40261	387	77110	432	54837	477	85184
343	52941	388	88317	433	64879	478	94279
344	65584	389	99496	434	74897	479	6803355
345	78191	390	5910646	435	84893	480	12412
346	90761	391	21768	436	94865	481	21451
347	5403295	392	32861	437	6404814	482	30470
348	15792	393	43926	438	14741	483	9471
349	28254	394	54962	439	24645	484	48454
350	40680	395	65971	440	34527	485	57417
351	53071	396	76952	441	44386	486	66363
352	65427	397	87905	442	54223	487	75290
353	77747	398	98831	443	64037	488	84198
354	90033	399	6009729	444	73830	489	93089
355	5502284	400	20600	445	83600	490	6901961
356	14500	401	31444	446	93349	491	10815
357	26682	402	42261	447	6503075	492	9651
358	38830	403	53050	448	12780	493	28469
359	50944	404	63814	449	22463	494	37269
360	63025	405	74550	450	32125	495	54817
361	75072	406	85260	451	41765	496	58417
362	87086	407	95944	452	51384	497	63564
363	99066	408	6106602	453	60982	498	72293
364	5611014	409	17233	454	70559	499	81005
365	22929	410	27839	455	80114	500	89700

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
501	6998377	546	7371926	591	7715875	636	8034571
502	7007037	547	9873	592	23217	637	41394
503	15680	548	87806	593	30547	638	8207
504	24305	549	95723	594	7864	639	55009
505	32914	550	403627	595	45170	640	61800
506	41505	551	11516	596	52463	641	68580
507	50080	552	9391	597	9743	642	75350
508	8637	553	27251	598	67012	643	82110
509	67178	554	35098	599	74268	644	8859
510	75702	555	42930	600	7781513	645	95597
511	84209	556	50748	601	88745	646	8102325
512	92700	557	8552	602	95965	647	9043
513	7101174	558	66342	603	7803173	648	15750
514	9631	559	74118	604	10369	649	22447
515	18072	560	81880	605	7554	650	9134
516	26497	561	89629	606	24726	651	35810
517	34905	562	97363	607	31887	652	42476
518	43298	563	7505084	608	9036	653	9132
519	51674	564	12791	609	46173	654	55777
520	60033	565	20484	610	53298	655	62413
521	68377	566	28164	611	60412	656	69038
522	76705	567	35831	612	7514	657	75654
523	85017	568	43483	613	74605	658	82259
524	93313	569	51123	614	81684	659	8854
525	7201593	570	8749	615	8751	660	95439
526	09857	571	66361	616	95807	661	8202015
527	18106	572	73960	617	7902852	662	8580
528	26339	573	81546	618	9885	663	15135
529	34557	574	9119	619	16906	664	21681
530	42759	575	96678	620	23917	665	8216
531	50945	576	7604225	621	30916	666	34742
532	9116	577	11758	622	7904	667	41258
533	67272	578	9278	623	44880	668	7765
534	75413	579	26786	624	51846	669	54261
535	83538	580	34280	625	8800	670	60748
536	91648	581	41761	626	65743	671	67225
537	9743	582	9230	627	72675	672	73693
538	7307823	583	56686	628	9596	673	80151
539	15888	584	64128	629	86506	674	8599
540	23938	585	71559	630	93405	675	93038
541	31973	586	78976	631	8000294	676	99467
542	9993	587	86381	632	7171	677	8305887
543	47998	588	93773	633	14037	678	12297
544	55989	589	7701153	634	20893	679	8698
545	63965	590	8520	635	7737	680	25089

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
681	8331471	726	8609366	771	8870544	816	9116902
682	7844	727	15344	772	6173	817	22221
683	44207	728	21314	773	81795	818	7533
684	50561	729	7275	774	7410	819	32839
685	6906	730	33229	775	93017	820	8139
686	63241	731	39174	776	98617	821	43432
687	9567	732	45111	777	8904210	822	8718
688	75884	733	51040	778	9796	823	53998
689	82192	734	6961	779	15375	824	9272
690	8491	735	62873	780	20946	825	64539
691	94780	736	68778	781	26510	826	69800
692	8401061	737	74675	782	32068	827	75055
693	7332	738	80564	783	7618	828	80303
694	13595	739	6444	784	43161	829	5545
695	9848	740	92317	785	8697	830	90781
696	26092	741	98182	786	54225	831	96010
697	32328	742	8704039	787	9747	832	9201233
698	8554	743	9888	788	65262	833	06450
699	44772	744	15729	789	70770	834	11661
700	8450980	745	21563	790	6271	835	6865
701	57180	746	27388	791	81765	836	22063
702	63371	747	33206	792	7252	837	7255
703	9553	748	9016	793	92732	838	32440
704	75727	749	44818	794	8205	839	7620
705	81891	750	8750613	795	9003671	840	42793
706	88047	751	56399	796	09131	841	47960
707	94194	752	62178	797	14583	842	53121
708	8500333	753	7950	798	20029	843	8276
709	06462	754	73713	799	5468	844	63424
710	12583	755	9470	800	9030900	845	8567
711	18696	756	85218	801	36325	846	73704
712	24800	757	90959	802	41744	847	8834
713	30895	758	6692	803	7155	848	83959
714	6982	759	8802418	804	52560	849	9077
715	43060	760	8136	805	7959	850	9294189
716	49130	761	13847	806	63350	851	99296
717	55192	762	9550	807	8735	852	9304396
718	61244	763	25245	808	74114	853	9490
719	7289	764	30934	809	9485	854	14579
720	73325	765	6614	810	84850	855	9661
721	79353	766	42288	811	90209	856	24738
722	85372	767	7954	812	5560	857	9808
723	91383	768	53612	813	9100905	858	34873
724	7386	769	9263	814	6244	859	9932
725	8603380	770	64907	815	11576	860	44985

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
861	9350032	896	9523080	931	6989497	966	9849771
862	5073	897	7924	932	94159	967	54265
863	60108	898	32763	933	8816	968	8754
864	5137	899	7597	934	9703469	969	63238
865	70161	900	42425	935	8116	970	7717
866	75179	901	47248	936	12758	971	72192
867	80191	902	52065	937	7396	972	6663
868	5197	903	6878	938	22028	973	81128
869	90198	904	61684	939	6656	974	5590
870	5193	905	6486	940	31279	975	90046
871	9400182	906	71282	941	35896	976	94498
872	5165	907	6073	942	40509	977	8946
873	10142	908	80858	943	5117	978	9903389
874	5114	909	5639	944	9720	979	7827
875	20081	910	90414	945	54318	980	12261
876	25041	911	95184	946	58911	981	16690
877	9996	912	9948	947	63500	982	21115
878	34945	913	6904708	948	8083	983	5535
879	9889	914	9462	949	72662	984	9951
880	44827	915	14211	950	9777236	985	34362
881	49759	916	18955	951	81805	986	38769
882	54686	917	23693	952	6369	987	43172
883	9607	918	8427	953	90929	988	7569
884	64523	919	33155	954	5484	989	51963
885	9433	920	7878	955	9800034	990	6352
886	74337	921	42596	956	04579	991	60737
887	9236	922	7309	957	9119	992	5117
888	84130	923	52017	958	13655	993	9492
889	9018	924	6720	959	8186	994	73864
890	93900	925	61417	960	22712	995	8231
891	98777	926	66110	961	27234	996	82593
892	9503649	927	70797	962	31751	997	6952
893	8515	928	5480	963	6263	998	91305
894	13375	929	80157	964	40770	999	5655
895	8230	930	4829	965	5273		
						1000	3 0000000

Tafel
für die
Logarithmen
der
Sinus
und
Tangenten.

Minut.	0 Grad.		Minut.	89 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
0	0	0	60	10.00000000	Infinit.
1	6.4637261	6.4637261	59	9.9999999	13.5362739
2	7647561	7647562	58	99	2352438
3	9408473	9408475	57	98	0591525
4	7.0657860	7.0657863	56	97	12.9342137
5	1626960	1626964	55	95	8373036
6	2418771	2418778	54	93	7581222
7	3088239	3088248	53	91	6911752
8	668157	668169	52	88	331831
9	4179681	4179696	51	85	5820304
10	4637255	637273	50	82	362727
11	5051181	5051203	49	78	4948797
12	429065	429091	48	74	570909
13	5776684	776715	47	69	223285
14	6098530	6098566	46	64	3901434
15	398160	398201	45	59	601799
16	678445	678492	44	53	321508
17	941733	941786	43	47	058214
18	7189966	7190026	42	40	2809974
19	424775	424841	41	34	575159
20	647537	647610	40	27	352390
21	859427	859508	39	19	140492
22	8061458	8061547	38	11	1938453
23	254507	254604	37	03	745396
24	439338	439444	36	894	560556
25	616623	616738	35	85	383262
26	786953	787077	34	76	212923
27	950854	950988	33	66	049012

Minut.	0 Grad.		Minut.	89 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
28	7.9108793	7.9108938	32	9.9999856	12.0891062
29	261190	261344	31	45	738656
30	408419	408584	30	35	591416
31	550819	550996	29	23	449004
32	688698	688886	28	12	311114
33	822334	822534	27	00	177466
34	951980	952192	26	788	047808
35	8.0077867	8.0078092	25	75	11.9921908
36	200207	200445	24	62	799555
37	319195	319446	23	48	680554
38	435009	435274	22	35	564726
39	547814	548094	21	21	451906
40	657763	658057	20	06	341943
41	764997	765306	19	691	234694
42	869646	869970	18	76	130030
43	971832	972172	17	60	027828
44	1071669	1072025	16	44	8927975
45	169262	169634	15	28	830366
46	264710	265099	14	11	734901
47	358104	358510	13	594	641490
48	449532	449956	12	77	550044
49	539075	539516	11	59	460484
50	626808	627267	10	41	372733
51	712804	713282	9	22	286718
52	97129	97626	8	03	202374
53	879848	880364	7	484	119636
54	961020	961556	6	64	038444
55	2040703	2041259	5	44	7958741
56	118949	119526	4	24	880474
57	95811	96408	3	03	03592
58	271335	271953	2	382	728047
59	345568	346208	1	60	653792
60	418553	419215	0	38	580785

1 Grad.

Minut.	1 Grad.		Minut.	88 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
1	8.2490332	8.2491015	59	9.9999316	11.7508985
2	560943	561649	58	294	438351
3	630424	631153	57	71	368847
4	698810	99563	56	47	00437
5	766136	766912	55	24	233088
6	832434	833234	54	00	166766
7	897734	98559	53	175	01441
8	962067	962917	52	50	037083
9	3025460	3026335	51	25	6973665
10	087941	88842	50	00	11158
11	149536	150462	49	074	840538
12	210269	211221	48	47	708779
13	70163	71143	47	21	28857
14	329243	330249	46	8994	669751
15	87529	88563	45	66	11437
16	445043	446105	44	39	553895
17	501805	502895	43	11	497105
18	57835	58953	42	882	41074
19	613150	614297	41	53	385703
20	67769	68945	40	24	31055
21	721710	722915	39	794	277085
22	74988	776223	38	64	23777
23	827620	828886	37	34	171114
24	79622	80918	36	03	19082
25	931008	932336	35	672	067664
26	81793	83152	34	09	16848
27	4031990	4033381	33	09	5966619
28	81614	83037	32	577	16963
29	130676	132132	31	44	867868
30	79190	80679	30	12	19321
31	4227168	4228690	29	478	771310
32	74621	76176	28	45	23824
33	321561	323150	27	11	676850
34	67999	69622	26	376	30378
35	413944	415603	25	42	584397
36	59409	61103	24	06	38897
37	504402	506131	23	271	493869
38	48934	50699	22	35	49301
39	93013	94814	21	199	05186

Minut.	1 Grad.		Minut.	88 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
40	8.4636649	8.4638486	20	9.9998162	11.5361514
41	79850	81725	19	25	18275
42	722626	724538	18	088	275462
43	64984	66933	17	50	33067
44	806932	808920	16	12	191080
45	48479	50505	15	7974	49495
46	89632	91696	14	35	08304
47	930398	932502	13	896	067498
48	70784	72928	12	56	27072
49	5010798	5012982	11	17	4987018
50	50447	52671	10	776	47329
51	89736	92001	9	36	07999
52	128673	130978	8	695	869022
53	67264	69610	7	53	30387
54	205514	207902	6	12	792098
55	43430	45860	5	570	54140
56	81017	83490	4	27	16510
57	318281	320797	3	484	679203
58	55228	57787	2	41	42213
59	91863	94466	1	398	05534
60	428192	430838	0	54	569162

Minut.	2 Grad.		Minut.	87 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
1	8.5464218	8.5466909	59	9.9997309	11.4533091
2	99948	502683	58	265	497317
3	535386	38166	57	20	61834
4	70536	73362	56	174	26638
5	605404	608276	55	28	391724
6	39994	42912	54	082	57088
7	74310	77275	53	36	22725
8	708357	711368	52	6989	288632
9	42139	45197	51	42	54803
10	75660	78766	50	894	21234
11	808923	812077	49	46	187923
12	41933	45136	48	798	54864
13	74694	77945	47	49	22055
14	907209	910509	46	00	089491
15	39483	42832	45	650	57168

Minut.	2 Grad. Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	87 Grad. Log. Sin.	Log. Tang.
16	8.5971517	8.5974917	44	9.9996601	11.4025083
17	6003317	6006767	43	550	3993233
18	34886	38386	42	00	961614
19	66226	69777	41	449	30223
20	97341	100943	40	398	899057
21	128235	31889	39	46	68111
22	58910	62616	38	294	37384
23	89369	93127	37	42	06873
24	219616	223427	36	189	776573
25	49653	53518	35	36	746482
26	79484	83402	34	082	16598
27	309111	313083	33	28	686917
28	38537	42563	32	5974	57437
29	67764	71845	31	19	28155
30	96796	400931	30	865	599059
31	425634	29825	29	809	70175
32	54282	58528	28	753	41472
33	82742	87044	27	697	12956
34	511016	515375	26	41	484625
35	39107	43522	25	584	56478
36	67017	71490	24	27	28510
37	94748	99279	23	469	00721
38	622303	626891	22	11	373109
39	49684	54331	21	353	45669
40	76893	81598	20	297	18402
41	703932	708697	19	36	291303
42	30804	35628	18	176	64372
43	57510	62393	17	16	37607
44	84052	88996	16	056	11004
45	810433	815437	15	4996	184563
46	36654	41719	14	35	58281
47	62718	67844	13	874	32156
48	88625	93813	12	12	06187
49	914379	919629	11	750	080371
50	39980	45292	10	688	54708
51	65431	70806	9	25	29194
52	90734	96172	8	562	03828
53	7015889	7021390	7	498	2978610
54	40899	46465	6	35	53535

Minut.	2 Grad. Log. Sin.	2 Grad. Log. Tang.	Minut.	87. Grad. Log. Sin.	87. Grad. Log. Tang.
55	8.7065766	8.7071395	5	9.9994370	11.2928605
56	90490	96185	4	06	03815
57	115075	120834	3	241	879166
58	39520	45345	2	176	54655
59	63829	69719	1	10	30281
60	88002	93958	0	044	06042

Minut.	3 Grad. Log. Sin.	3 Grad. Log. Tang.	Minut.	86 Grad. Log. Sin.	86 Grad. Log. Tang.
1	8.7212040	8.7218063	59	9.9993978	11.2781937
2	35946	42035	58	11	57965
3	59721	65877	57	844	34123
4	83366	89589	56	776	10411
5	306882	313174	55	08	686826
6	30272	36631	54	640	63369
7	53535	59964	53	572	40036
8	76675	83172	52	03	16828
9	99691	406258	51	433	593742
10	422586	29222	50	364	70778
11	45360	52067	49	293	47933
12	68015	74792	48	23	25208
13	90553	97400	47	152	02600
14	512973	519892	46	081	480108
15	35278	42269	45	09	57731
16	57469	64531	44	2938	35469
17	79546	86681	43	865	13319
18	601512	608719	42	793	391281
19	23366	30647	41	20	69353
20	45111	52465	40	646	47535
21	66747	74175	39	572	25825
22	88275	95777	38	498	04223
23	709697	717274	37	24	282726
24	31014	37665	36	349	61335
25	52226	59952	35	274	40048
26	73334	81136	34	198	18864
27	94340	802218	33	22	197782
28	815244	23199	32	046	76801
29	36048	44079	31	1969	55921
30	56853	64861	30	892	35139

Minut.	3 Grad. Log. Sin.	3 Grad. Log. Tang.	Minut.	86 Grad. Log. Sin.	86 Grad. Log. Tang.
31	8.7877359	8.7885544	29	9.9991815	11.2114456
32	97867	906130	28	737	093870
33	918278	26620	27	659	73380
34	38594	47014	26	580	52986
35	58814	67313	25	01	32687
36	78941	87519	24	422	12481
37	98974	8007632	23	342	1992368
38	8018915	27653	22	262	72347
39	38764	47583	21	182	52417
40	58523	67422	20	01	32578
41	78192	87172	19	020	12828
42	97772	106834	18	0938	893166
43	117264	26407	17	856	73593
44	36668	45894	16	774	54106
45	55985	65294	15	691	34706
46	75217	84608	14	608	15392
47	94363	203838	13	525	796162
48	213425	22984	12	441	77016
49	32404	42046	11	357	57954
50	51299	61026	10	273	38974
51	70112	79924	9	188	20076
52	88844	98741	8	03	01259
53	307495	317478	7	017	682522
54	26066	36134	6	89931	63866
55	44557	54712	5	845	45288
56	62969	73211	4	758	26789
57	81304	91633	3	671	08367
58	99561	409977	2	584	590023
59	417741	28245	1	496	71755
60	35845	46437	0	08	53563

Minut.	4 Grad. Log. Sin.	4 Grad. Log. Tang.	Minut.	85 Grad. Log. Sin.	85 Grad. Log. Tang.
1	8.8453874	8.8464554	59	9.9989319	11.1535446
2	71827	82597	58	230	17403
3	89707	500566	57	141	499434
4	507512	18461	56	052	81539
5	25245	36283	55	8962	63717
6	42905	54034	54	871	45966

Minut.	4 Grad.		Minut.	85 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
7	8.8560493	8.8571713	53	9.9988780	11.1428287
8	78010	89321	52	689	10679
9	95457	606859	51	598	393141
10	612833	24327	50	06	75673
11	30139	41725	49	414	58275
12	47376	59055	48	321	40945
13	64545	76317	47	228	23683
14	81646	93511	46	135	06489
15	98680	710638	45	041	289362
16	715646	27699	44	7947	72301
17	32546	44694	43	853	55306
18	49381	61623	42	758	38377
19	66150	78487	41	663	21513
20	82854	95286	40	567	04714
21	99493	812022	39	471	187978
22	816069	28694	38	375	71306
23	32581	45303	37	278	54697
24	49031	61850	36	181	38150
25	65418	78334	35	084	21666
26	81743	94757	34	6986	05243
27	98007	911119	33	888	088881
28	914209	27420	32	790	72580
29	30351	43660	31	691	56340
30	46433	59842	30	591	40158
31	62455	75963	29	492	24037
32	78418	92026	28	392	07974
33	94322	9008030	27	292	0991970
34	9010168	23977	26	191	76023
35	25955	39866	25	090	60134
36	41685	55697	24	5988	44303
37	57358	71472	23	886	28528
38	72975	87190	22	784	12810
39	88535	102853	21	682	897147
40	104039	18460	20	579	81540
41	19487	34012	19	475	65988
42	34881	49509	18	372	50491
43	50219	64952	17	268	35048
44	65504	80340	16	163	19660
45	80734	95675	15	058	04325

Minut.	4 Grad.		Minut.	85 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
46	8.9195911	8.9210957	14	9.9984953	11.0789043
47	211034	26186	13	848	73814
48	26105	41363	12	742	58637
49	41123	56487	11	636	43513
50	56089	71560	10	529	28440
51	71003	86581	9	422	13419
52	85866	301552	8	315	698448
53	300678	16471	7	207	83529
54	15439	31340	6	099	68660
55	30150	46160	5	3990	53840
56	44811	60929	4	881	39071
57	59422	75650	3	772	24350
58	73983	90321	2	663	09670
59	88496	404944	1	553	595056
60	402960	19518	0	442	80482

Minut.	5 Grad.		Minut.	84 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
1	8.9417376	8.9434044	59	9.9983332	11.0565956
2	31743	48523	58	220	51477
3	46063	62954	57	109	37046
4	60335	77338	56	2997	22662
5	74561	91676	55	885	08324
6	88739	505967	54	772	494033
7	502871	20211	53	660	79789
8	16957	34410	52	546	65590
9	30996	48564	51	433	51436
10	44991	62672	50	318	37328
11	58940	76735	49	204	23265
12	72843	90754	48	089	09246
13	86703	604728	47	1974	395272
14	600517	18659	46	859	81341
15	14288	32545	45	743	67455
16	28014	46386	44	629	53612
17	41697	60188	43	510	39812
18	55337	73944	42	393	26056
19	68934	87658	41	275	12342
20	82487	701330	40	158	298670
21	95999	14959	39	040	85041

Minut.	5 Grad. Log. Sin.	5 Grad. Log. Tang.	Minut.	84 Grad. Log. Sin.	84 Grad. Log. Tang.
22	8.9709468	8.9728547	38	9.9980921	11.0271453
23	22895	42092	37	802	57908
24	36280	55597	36	683	44403
25	49624	69060	35	563	30940
26	62926	82483	34	443	17517
27	76188	95865	33	323	04135
28	89408	809206	32	202	190794
29	802589	22507	31	081	77493
30	15729	35769	30	79960	64231
31	28829	48991	29	838	51009
32	41889	62173	28	716	37827
33	54910	75317	27	593	24683
34	67891	88421	26	470	11579
35	89834	901487	25	347	098513
36	93737	14514	24	223	85486
37	906602	27503	23	099	72497
38	19429	40454	22	8975	59546
39	32217	53367	21	850	46633
40	44968	66243	20	725	33757
41	57681	79081	19	599	20916
42	70356	91883	18	473	08117
43	82994	0004647	17	347	9995353
44	95595	17375	16	220	82625
45	0008160	30066	15	093	69934
46	20687	42721	14	7966	57279
47	33179	55340	13	838	44660
48	45634	67924	12	710	32076
49	58053	80471	11	582	19529
50	70436	92984	10	453	07016
51	82784	105461	9	323	894539
52	95096	17903	8	194	82097
53	107374	30310	7	064	69690
54	19616	42682	6	6933	57318
55	31823	55021	5	803	44979
56	43996	67325	4	672	32675
57	56135	79594	3	540	20406
58	68239	91831	2	408	08169
59	80309	204033	1	276	795967
60	92346	16202	0	143	83798

Minut.	6 Grad. Log. Sin.	6 Grad. Log. Tang.	Minut.	83 Grad. Log. Sin.	83 Grad. Log. Tang.
1	9.0204348	9.0228338	59	9.9976011	10.9771662
2	16318	40441	58	5877	59559
3	28254	52510	57	743	47490
4	40157	64548	56	609	35452
5	52027	76552	55	475	23448
6	63865	88524	54	340	11476
7	75669	300464	53	205	699536
8	87442	12373	52	069	87627
9	99182	24249	51	4933	75751
10	310890	36093	50	797	63907
11	22567	47906	49	660	52094
12	34212	59688	48	523	40312
13	45825	71439	47	386	28561
14	57407	83159	46	248	16841
15	68958	94848	45	110	05152
16	80477	406506	44	3971	593494
17	91966	18134	43	833	81866
18	403424	29731	42	693	70269
19	14852	41299	41	554	58701
20	26249	52836	40	414	47164
21	37617	64343	39	273	35657
22	48954	75821	38	132	24179
23	60261	87270	37	2991	12730
24	71538	98689	63	850	01311
25	82786	510078	35	708	489922
26	94005	21439	34	566	78561
27	505194	32771	33	423	67229
28	16354	44074	32	280	55926
29	27485	55349	31	137	44651
30	38588	66595	30	1993	33405
31	49661	77813	29	849	22187
32	60706	89002	28	704	10998
33	71723	600164	27	559	399836
34	82711	11297	26	414	88703
35	93671	22403	25	268	77597
36	604604	33482	24	122	66518
37	15509	44533	23	0976	55467
38	26386	55556	22	829	44444
39	37235	66553	21	682	33447
40	48057	77522	20	535	22478
41	58852	88465	19	387	11535
42	69619	99381	18	239	00619

Minut.	6 Grad. Log. Sin.	6 Grad. Log. Tang.	Minut.	83 Grad. Log. Sin.	83 Grad. Log. Tang.
43	9.0680360	9.0710270	17	9.9970090	10.9289730
44	91074	21133	16	69941	78867
45	701761	31969	15	792	68031
46	12421	42779	14	642	57221
47	23055	53563	13	492	46437
48	33663	64321	12	342	35679
49	44244	75053	11	191	24947
50	54799	85760	10	040	14240
51	65329	96441	9	8888	03559
52	75832	807096	8	736	192904
53	86310	17726	7	584	82274
54	96762	28331	6	431	71669
55	807189	38911	5	278	61089
56	17590	49466	4	125	50534
57	27966	59996	3	7971	40004
58	38317	70501	2	817	29499
59	48643	80981	1	662	19019
60	58945	91438	0	507	08562

Minut.	7 Grad. Log. Sin.	7 Grad. Log. Tang.	Minut.	82 Grad. Log. Sin.	82 Grad. Log. Tang.
1	9.0869221	9.0901869	59	9.9967352	10.9098131
2	79473	12277	58	196	87723
3	89700	22660	57	040	77340
4	99903	33020	56	6884	66980
5	910082	43355	55	727	56645
6	20237	53669	54	570	46333
7	30367	63955	53	412	36045
8	40474	74219	52	254	25781
9	50556	84460	51	096	15540
10	60615	94678	50	5937	05322
11	70651	1004872	49	778	8995128
12	80662	15044	48	619	84956
13	90651	25192	47	459	74808
14	1000616	35317	46	299	64683
15	10558	45420	45	138	54580
16	20477	55500	44	4977	44500
17	30373	65557	43	816	34443
18	40246	75591	42	655	24406

Minut.	7 Grad.		Minut.	82 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
19	9.1050096	9.1085604	41	9.9964493	10.8914366
20	9924	95594	40	330	04406
21	69729	105562	39	167	94438
22	79512	15508	38	044	884492
23	89272	25431	37	3841	74569
24	99010	35333	36	677	64667
25	108726	45213	35	513	54787
26	18420	55072	34	348	44928
27	28092	64909	33	183	35091
28	137742	74724	32	018	25276
29	47370	84518	31	2852	15482
30	56977	94291	30	686	05709
31	66562	204043	29	519	795957
32	76125	13773	28	352	86227
33	85667	23482	27	185	76518
34	95188	33171	26	017	66829
35	204688	42839	25	1849	57161
36	14167	52486	24	681	47514
37	23624	62112	23	512	37888
38	33061	71718	22	343	28282
39	42477	81303	21	174	18697
40	51872	90868	20	004	09132
41	61246	300413	19	0834	699587
42	70600	09937	18	663	0063
43	9934	19442	17	492	80558
44	89247	28926	16	321	71074
45	98539	38391	15	149	61609
46	307812	47835	14	59977	52165
47	17064	57260	13	804	42740
48	26297	66665	12	631	33335
49	35509	76051	11	458	23949
50	44702	85417	10	284	14583
51	53875	94764	9	111	05236
52	63028	404092	8	8936	595908
53	72161	13400	7	761	86600
54	81275	22689	6	586	77311
55	90370	31959	5	411	68041
56	99445	41210	4	235	58790
57	408501	50442	3	059	49558
58	17537	59655	2	7882	40345
59	26555	68850	1	705	31150
60	35553	78025	0	528	21975

Minut.	8 Grad.		Minut.	81 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
1	9.1444532	9.1487182	59	9.9957350	10.8512818
2	53493	96321	58	172	03679
3	62435	505441	57	6993	494559
4	71358	14543	56	815	85457
5	80262	23627	55	635	76373
6	89148	32692	54	456	67308
7	98015	41739	53	276	58261
8	506864	50769	52	095	49231
9	15694	59780	51	5915	0220
10	24507	68773	50	734	31227
11	33301	77748	49	552	22252
12	42076	86706	48	370	13294
13	50834	95646	47	188	04354
14	59574	604569	46	005	395431
15	68296	13473	45	4822	86527
16	77000	22361	44	639	77639
17	85686	31231	43	455	68769
18	94354	40083	42	271	59917
19	603005	48919	41	087	51081
20	11639	57737	40	3902	42263
21	20254	66538	39	717	33462
22	28853	75322	38	531	24678
23	37434	84989	37	345	15911
24	45998	92839	36	159	07161
25	54544	701572	35	2972	298428
26	63074	10289	34	785	89711
27	71586	18989	33	597	1011
28	80081	27672	32	409	72328
29	8559	36338	31	221	63662
30	97021	44988	30	033	55012
31	705465	53622	29	1844	46378
32	13893	62239	28	654	37761
33	22305	70840	27	464	29260
34	30699	79425	26	274	20575
35	39077	87993	25	084	12007
36	47439	96546	24	0893	03454
37	55784	805082	23	702	194918
38	64112	13602	22	510	86398
39	72425	22106	21	318	77894
40	80721	30595	20	126	69405
41	9001	39068	19	49933	0932
42	97265	47525	18	740	52475

Minut.	8 Grad. Log. Sin.	8 Grad. Log. Tang.	Minut.	81 Grad. Log. Sin.	81 Grad. Log. Tang.
43	9.1805512	9.1855966	17	9.9949546	10.8144034
44	13744	64392	16	352	35608
45	21960	72802	15	158	27198
46	30160	81196	14	8964	18804
47	8344	9575	13	769	0425
48	46512	97939	12	573	02061
49	54665	906287	11	377	093713
50	62802	14621	10	181	85379
51	70923	22939	9	7985	77061
52	79029	31241	8	788	68759
53	87120	9529	7	591	0471
54	95195	47802	6	393	52198
55	903254	56059	5	195	43941
56	11299	64302	4	6997	35698
57	19328	72530	3	798	27470
58	27342	80743	2	599	19257
59	35341	8941	1	399	1059
60	43324	97125	0	199	02875

Minut.	9 Grad. Log. Sin.	9 Grad. Log. Tang.	Minut.	80 Grad. Log. Sin.	80 Grad. Log. Tang.
1	9.1951293	9.2005294	59	9.9945999	10.7994706
2	9247	13449	58	798	86551
3	67186	21588	57	597	78411
4	75110	29714	56	396	70286
5	83019	37825	55	194	62175
6	90913	45922	54	4992	54078
7	98793	54004	53	789	45996
8	2006658	62072	52	587	37928
9	14509	70126	51	383	29874
10	22345	78165	50	180	21835
11	30167	86191	49	3975	13809
12	7974	94203	48	771	05797
13	45766	102200	47	566	897800
14	53545	10184	46	361	89816
15	61309	8153	45	156	1847
16	69059	26109	44	2950	73891
17	76795	34051	43	743	65949
18	84516	41980	42	537	58020

Minut.	9 Grad. Log. Sin.	9 Grad. Log. Tang.	Minut.	80 Grad. Log. Sin.	80 Grad. Log. Tang.
19	9.2092224	9.2149894	41	9.9942330	10.7850106
20	9917	57795	40	122	42205
21	107597	65683	39	1914	34317
22	15263	73556	38	706	26444
23	22914	81417	37	498	18583
24	30552	9264	36	289	0736
25	38176	97097	35	079	02903
26	45787	204917	34	0870	795083
27	53384	12724	33	659	87276
28	60967	20518	32	449	79482
29	68536	8298	31	238	1702
30	76092	36065	30	027	63935
31	83635	43819	29	39815	56181
32	91164	51561	28	603	48439
33	8680	59289	27	391	0711
34	206182	67004	26	178	32996
35	13671	74706	25	8965	25294
36	21147	82395	24	752	17605
37	8609	90071	23	538	09929
38	36059	97735	22	324	2265
39	43495	305386	21	109	694614
40	50918	13024	20	7894	86976
41	8328	20650	19	679	79350
42	65725	28262	18	463	1738
43	73110	35863	17	247	64137
44	80481	43451	16	030	56549
45	7839	51026	15	6813	48974
46	95185	58589	14	596	41411
47	302518	66139	13	378	33861
48	09838	73678	12	160	26322
49	17145	81203	11	5942	18797
50	24440	8717	10	723	1283
51	31722	96218	9	504	03782
52	8992	403708	8	285	596292
53	46249	11185	7	065	88815
54	53494	8650	6	4844	1350
55	60726	26103	5	624	73897
56	7946	33543	4	403	66457
57	75153	40972	3	181	59028
58	82349	8389	2	3959	51611
59	9532	55794	1	737	44206
60	96702	63188	0	515	36812

10 Grad.

Minut.	10 Grad. Log. Sin.	10 Grad. Log. Tang.	Minut.	79 Grad. Log. Sin.	79 Grad. Log. Tang.
1	9.2403861	9.2470569	59	9.9933292	10.7529431
2	11007	7939	58	068	2061
3	8141	85297	57	2845	14703
4	25264	92643	56	621	07357
5	32374	9978	55	396	0022
6	9472	507301	54	171	492699
7	46558	14612	53	1946	85388
8	53632	21912	52	720	78088
9	60695	9200	51	494	0800
10	7746	36477	50	268	63523
11	74784	43743	49	041	56257
12	81811	50997	48	0814	49003
13	88827	8240	47	587	1760
14	95830	65472	46	359	34528
15	502822	72691	45	131	27308
16	09803	79901	44	29902	0099
17	16772	87099	43	673	12901
18	23729	94285	42	444	05715
19	30675	601461	41	214	398539
20	7609	8625	40	8984	1375
21	44532	15779	39	753	84221
22	51444	22921	38	522	77079
23	8344	30053	37	291	69947
24	65233	7173	36	059	2827
25	72110	44283	35	7827	55717
26	8977	51382	34	595	48618
27	85832	8470	33	362	1530
28	92676	65547	32	129	34453
29	9509	72613	31	6895	27387
30	606330	9669	30	661	0331
31	13141	86714	29	427	13286
32	9941	93749	28	192	06251
33	26729	700772	27	5957	299228
34	33507	7786	26	722	2214
35	40274	14788	25	486	85212
36	7030	21780	24	250	78220
37	53775	8762	23	013	71238
38	60509	35733	22	4776	64267
39	7232	42694	21	539	57306
40	73945	9644	20	301	0356
41	80647	56584	19	063	43416
42	7338	63514	18	3824	36486

Minut.	10 Grad.		Minut.	79 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
43	9.2694019	9.2770434	17	9.9923585	10.7229566
44	700689	7343	16	346	2657
45	7348	84242	15	106	15758
46	13997	91131	14	2866	08869
47	20635	8009	13	626	1991
48	7263	804878	12	385	195122
49	33880	11736	11	144	88264
50	40487	8585	10	1902	1415
51	7083	25423	9	660	74577
52	53669	32251	8	418	67749
53	60245	9070	7	175	0930
54	6811	45878	6	0932	54122
55	73366	52677	5	689	47323
56	9911	9466	4	445	0534
57	86445	66245	3	201	33755
58	92970	73014	2	19956	26986
59	9484	9773	1	711	0227
60	805988	86523	0	466	13477

Minut.	11 Grad.		Minut.	78 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
1	9.2812483	9.2893263	59	9.9919220	10.7106737
2	8967	9993	58	8974	0007
3	25441	906713	57	727	093287
4	31905	13424	56	480	86576
5	8359	20126	55	233	79874
6	44803	6817	54	7986	3183
7	51237	33500	53	737	66500
8	7661	40172	52	489	59828
9	64076	6836	51	240	3164
10	70480	53489	50	6991	46511
11	6875	60134	49	741	39866
12	83260	6769	48	492	3231
13	9636	73395	47	241	26605
14	96001	80011	46	5990	19989
15	902357	6618	45	739	3382
16	8704	93216	44	488	06784
17	15040	9804	43	236	0196
18	21367	3006383	42	4984	6993617

Minut.	11 Grad. Log. Sin.	11 Grad. Log. Tang.	Minut.	78 Grad. Log. Sin.	78 Grad. Log. Tang.
19	9.2927685	9.3012954	41	9.9914731	10.6987046
20	33993	9514	40	478	0486
21	40291	26066	39	225	73934
22	6580	32609	38	3971	967391
23	52859	9143	37	717	0857
24	9129	45667	36	462	54333
25	65390	52183	35	207	47817
26	71641	8689	34	2952	1311
27	7883	65187	33	696	34813
28	84116	71675	32	440	28329
29	90339	8155	31	184	1845
30	6553	84626	30	1927	15374
31	3002758	91088	29	670	08912
32	8953	7541	28	412	2459
33	15140	103985	27	154	896015
34	21317	10421	26	0896	89579
35	7485	6848	25	637	3152
36	33644	23266	24	378	76734
37	9794	9675	23	119	0325
38	45934	36076	22	09859	63924
39	52066	42468	21	598	57532
40	8189	8851	20	338	1149
41	64303	55226	19	077	44774
42	70407	61592	18	8815	38408
43	6503	7950	17	553	2050
44	82590	74299	16	291	25701
45	8668	80640	15	029	19360
46	94737	6972	14	7766	3028
47	100798	93295	13	502	06705
48	6849	9611	12	239	0389
49	12892	205918	11	6974	794082
50	8926	12216	10	710	87784
51	24951	8506	9	445	1494
52	30968	24788	8	180	75212
53	6976	31061	7	5914	68939
54	42975	7327	6	648	2673
55	8965	43584	5	382	56416
56	54947	9832	4	115	0168
57	60921	56073	3	4848	43927
58	6885	62305	2	580	37695
59	72841	8529	1	312	1471
60	8789	74745	0	044	25255

Minut.	12 Grad.		Minut.	77 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
1	9.3184728	9.3280953	59	9.9903775	10.6719047
2	90659	7153	58	506	2847
3	6581	93345	57	237	06655
4	202495	9528	56	2967	0472
5	8400	305704	55	697	694296
6	14297	11872	54	426	88128
7	20186	8031	53	155	1969
8	6066	24183	52	1883	75817
9	31938	30327	51	612	69673
10	7802	6463	50	339	3537
11	43657	42591	49	067	57409
12	9505	8711	48	0794	1289
13	55344	54823	47	521	45177
14	61174	60927	46	247	39073
15	66997	7024	45	899973	2976
16	72811	73113	44	698	26887
17	8617	9194	43	423	0806
18	84416	85267	42	148	14733
19	90206	91333	41	8873	08667
20	5988	7391	40	597	2609
21	301761	403441	39	320	596559
22	7527	9484	38	043	90516
23	13285	15519	37	7766	84481
24	9035	21546	36	489	78454
25	24777	7566	35	211	2434
26	30511	33578	34	6932	66422
27	6237	9583	33	654	0417
28	41955	45580	32	374	54420
29	7665	51570	31	095	48430
30	53368	7552	30	5815	2448
31	9062	63527	29	535	36473
32	64749	9494	28	254	0506
33	70428	75454	27	4973	24546
34	6099	81407	26	692	18593
35	81762	7352	25	410	2648
36	7418	93290	24	128	06710
37	93065	9220	23	3845	500780
38	8706	505143	22	562	494857
39	404338	11059	21	279	88941
40	9963	6968	20	2995	3032
41	15580	22869	19	711	77131
42	21190	8763	18	427	1237

Minut.	12 Grad. Log. Sin.	12 Grad. Log. Tang.	Minut.	77 Grad. Log. Sin.	77 Grad. Log. Tang.
43	9.3426792	9.3534650	17	9.9892142	10.6465350
44	32386	40530	16	1856	59470
45	7973	6402	15	571	3598
46	43552	52267	14	285	47733
47	9124	8126	13	0998	1874
48	54688	63977	12	711	36023
49	60245	9821	11	424	0179
50	5794	75658	10	137	24342
51	71336	81487	9	9849	18513
52	6870	7310	8	560	2690
53	82397	93126	7	271	06874
54	7917	8935	6	8982	1065
55	93429	604736	5	693	395264
56	8934	10531	4	403	89469
57	504432	6319	3	113	3681
58	9922	22100	2	7822	77900
59	15405	7874	1	531	2126
60	20880	33641	0	239	66359

Minut.	13 Grad. Log. Sin.	13 Grad. Log. Tang.	Minut.	76 Grad. Log. Sin.	76 Grad. Log. Tang.
1	9.3526349	9.3639401	59	9.9886947	10.6360599
2	31810	45155	58	655	54845
3	7264	50901	57	363	49099
4	42710	6641	56	070	3359
5	8150	62374	55	5776	37626
6	53582	8100	54	482	1900
7	9007	73819	53	188	26181
8	64426	9532	52	4894	0468
9	9836	85238	51	599	14762
10	75240	90937	50	303	09063
11	80637	6629	49	008	3371
12	6027	702315	48	3712	297685
13	91409	7994	47	415	2006
14	6785	13667	46	118	86333
15	602154	9333	45	2821	0667
16	7515	24992	44	523	75008
17	12870	30645	43	225	69355
18	8217	6291	42	1927	3709

Minut.	13 Grad.		Minut.	76 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
19	9.3623558	9.3741930	41	9.9881628	10.6258070
20	8892	7563	40	329	2437
21	34219	53190	39	029	46810
22	9539	8810	38	0729	1190
23	44852	64423	37	429	35577
24	50158	70030	36	128	29970
25	5458	5631	35	79827	4369
26	60750	81225	34	525	18775
27	6036	6813	33	223	3187
28	71315	92394	32	8921	07606
29	6587	7969	31	618	2031
30	81853	803537	30	315	196463
31	7111	09100	29	012	90900
32	92363	14655	28	7708	85345
33	7608	20205	27	404	79795
34	702847	5748	26	099	4252
35	8079	31285	25	6794	68715
36	13304	6816	24	488	3184
37	8523	42340	23	183	57660
38	23735	7358	22	5876	2142
39	8940	53370	21	570	46630
40	34139	8876	20	263	1124
41	9331	64376	19	4955	35624
42	44517	9869	18	648	0131
43	9696	75356	17	339	24664
44	54868	80837	16	031	19163
45	60034	6312	15	3722	3688
46	5194	91781	14	413	08219
47	70347	7244	13	103	2756
48	5493	902700	12	2793	097300
49	80633	8151	11	482	1849
50	5767	13595	10	171	86405
51	90894	9034	9	1860	0966
52	6015	24466	8	549	75534
53	801129	9893	7	236	0107
54	6237	35313	6	0924	64687
55	11339	40727	5	611	59273
56	6434	6136	4	298	3864
57	21523	51538	3	69984	48462
58	6605	6935	2	670	3065
59	31682	62326	1	356	37674
60	6752	7711	0	041	2289

Minut.	14 Grad.		Minut.	75 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
1	9.3841815	9.3973089	59	9.9868726	10.6026911
2	6873	8463	58	410	1537
3	51924	83830	57	094	16170
4	6969	9191	56	7778	0809
5	62008	94547	55	461	05453
6	7040	9896	54	144	0104
7	72067	4005240	53	6827	5994760
8	7087	10578	52	509	89422
9	82101	5910	51	191	4090
10	7109	21237	50	5872	78763
11	92111	6558	49	553	3442
12	7106	31873	48	233	68127
13	902096	7182	47	4913	2818
14	7079	42486	46	593	57514
15	12057	7784	45	273	2216
16	7028	53076	44	3952	46924
17	21993	8363	43	630	1637
18	6952	63644	42	308	36356
19	31905	8919	41	2986	1081
20	6852	74189	40	663	25811
21	41794	9453	39	340	0547
22	6729	84712	38	017	15288
23	51658	9965	37	1693	0035
24	6581	95212	63	369	04788
25	61499	100454	35	045	899546
26	6410	5690	34	0720	4310
27	71315	10921	33	394	89079
28	6215	6146	32	069	3854
29	81109	21366	31	59742	78634
30	5996	6581	30	416	3419
31	90878	31789	29	089	68211
32	5754	6993	28	8762	3007
33	4000625	42191	27	434	57809
34	5489	7383	26	106	2617
35	10348	52570	25	7777	47430
36	5201	7752	24	449	2248
37	20048	62928	23	119	37072
38	4889	8099	22	6790	1901
39	9734	73265	21	460	26735
40	34554	8425	20	129	1575
41	9378	83580	19	5798	16420
42	44196	8729	18	467	1271

Minut.	14 Grad.		Minut.	75 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
43	9.4049009	9.4193874	17	9.9855135	10.5806126
44	53816	9013	16	4803	0987
45	8617	204146	15	471	795854
46	63413	9275	14	138	0725
47	8203	14398	13	3805	85602
48	72987	9515	12	471	0485
49	7766	24628	11	138	75372
50	82539	9735	10	2803	0265
51	7306	34838	9	468	65162
52	92068	9935	8	133	0065
53	6824	45026	7	1798	54974
54	101575	50113	6	462	49887
55	6320	5194	5	125	4806
56	11059	60271	4	0789	39729
57	5793	5342	3	452	4658
58	20522	70408	2	114	29592
59	5245	5469	1	49776	4531
60	9962	80525	0	438	19475

Minut.	15 Grad.		Minut.	74 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
1	9.4134674	9.4285575	59	9.9849099	10.5714425
2	9381	90621	58	8760	09379
3	44082	5661	57	420	4339
4	8778	300697	56	081	699303
5	53468	5727	55	7740	4273
6	8152	10753	54	400	89247
7	62832	5773	53	059	4227
8	7506	20789	52	6717	79211
9	72174	5799	51	375	4201
10	6837	30804	50	033	69196
11	81495	5805	49	5690	4195
12	6148	40800	48	347	59200
13	90795	5791	47	004	4209
14	5436	50776	46	4660	49224
15	200073	5757	45	316	4243
16	4704	60733	44	971	39267
17	9330	5704	43	626	4296
18	13950	70670	42	281	29330

Minut.	15 Grad.		Minut.	74 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
19	9.4218566	9.4375631	41	9.9842935	10.5624369
20	23176	80587	40	589	19413
21	7780	5538	39	242	4462
22	32380	90485	38	1895	09515
23	6974	5426	37	548	4574
24	41563	400363	36	200	599637
25	6147	5295	35	0852	94705
26	50726	10222	34	503	89778
27	5299	5145	33	154	4855
28	9867	20062	32	39805	79938
29	64430	4975	31	455	5025
30	8988	9883	30	105	0117
31	73541	34786	29	8755	65214
32	8089	9685	28	404	0315
33	82631	44579	27	052	55421
34	7169	9468	26	7701	0532
35	91701	54352	25	348	45648
36	6228	9232	24	6996	0768
37	300750	64107	23	643	35893
38	5267	8978	22	290	1022
39	9779	73843	21	5936	26157
40	14286	8704	20	582	1296
41	8788	83561	19	227	16439
42	23285	8413	18	4872	1587
43	7777	93260	17	517	06740
44	32264	8102	16	161	1898
45	6746	502940	15	3805	497060
46	41223	07774	14	449	2226
47	5694	12602	13	092	87398
48	50161	17427	12	2735	2573
49	4623	22246	11	377	77754
50	9080	7061	10	019	2939
51	63532	31872	9	1661	68128
52	7980	6678	8	302	3322
53	72422	41479	7	0942	58521
54	6859	6276	6	583	3724
55	81292	51069	5	223	48931
56	5719	5857	4	29862	4143
57	90142	60641	3	501	39359
58	4560	5420	2	140	4580
59	8973	70194	1	8778	29806
60	403381	4964	0	416	5036

16 Grad.

Minut.	16 Grad. Log. Sin.	16 Grad. Log. Tang.	Minut.	73 Grad. Log. Sin.	73 Grad. Log. Tang.
1	9.4407784	9.4579730	59	9.9828054	10.5420270
2	12182	84491	58	7691	15509
3	6576	9248	57	328	0752
4	20965	94001	56	6964	05999
5	5349	8749	55	600	1251
6	9728	603492	54	236	396508
7	34103	8232	53	5871	1768
8	8472	12967	52	506	87033
9	42837	7697	51	140	2303
10	7197	22423	50	4774	77577
11	51553	7145	49	408	2855
12	5904	31863	48	041	68137
13	60250	6576	47	3674	3424
14	4591	41285	46	306	58715
15	8927	5990	45	2938	4010
16	73259	50690	44	569	49310
17	7586	5386	43	201	4614
18	81909	60078	42	1831	39922
19	6227	4765	41	462	5235
20	90540	9448	40	092	0552
21	4849	74127	39	0721	25873
22	9153	8802	38	351	1198
23	503452	83473	37	19979	16527
24	7747	8139	36	608	1861
25	12037	92801	35	236	07199
26	6322	7459	34	8863	2541
27	20603	702112	33	490	297888
28	4879	6762	32	117	3238
29	9151	11407	31	7744	88593
30	33418	6048	30	370	3952
31	7681	20685	29	6995	79315
32	41939	5318	28	620	4682
33	6192	9947	27	245	0053
34	50441	34571	26	5870	65428
35	4686	9192	25	494	0808
36	8926	43808	24	117	56192
37	63161	8421	23	4740	1579
38	7392	53029	22	363	46971
39	71618	57633	21	3986	2367
40	5840	62233	20	608	37767
41	80058	6829	19	229	3171
42	4271	71421	18	2850	28579

Minut.	16 Grad.		Minut.	73 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
43	9.4588480	9.4776009	17	9.9812471	10.5223991
44	92684	80592	16	091	19408
45	6884	5172	15	1711	4828
46	601079	9748	14	331	0252
47	5270	94319	13	0950	05681
48	9456	8887	12	569	1113
49	13638	803451	11	187	196549
50	7816	8011	10	09805	1989
51	21989	12566	9	423	87434
52	26158	7118	8	040	2882
53	30323	21666	7	8657	78334
54	4483	6210	6	273	3790
55	8639	30750	5	7889	69250
56	42790	5286	4	505	4714
57	6958	9818	3	120	0182
58	51081	44346	2	6735	55654
59	5219	8870	1	349	1130
60	9353	53390	0	5963	46610

Minut.	17 Grad.		Minut.	72 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
1	9.4663483	9.4857907	59	9.9805577	10.5142093
2	7609	62419	58	190	37581
3	71730	6928	57	4803	3072
4	5848	71433	56	415	28567
5	9960	5933	55	027	4067
6	84069	80430	54	3639	19570
7	8173	4924	53	250	5076
8	92273	9413	52	2860	0587
9	6369	93898	51	471	06102
10	700461	8380	50	081	1620
11	4548	902858	49	1690	097142
12	8631	7332	48	299	2668
13	12710	11802	47	0908	88198
14	6785	6269	46	516	3731
15	20856	20731	45	124	79269
16	4922	5190	44	99732	4810
17	8985	9646	43	339	0354
18	33043	34097	42	8946	65903

Minut.	17 Grad.		Minut.	72 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
19	9.4737097	9.4938545	41	9.9798552	10.5061455
20	41146	42988	40	158	57012
21	5192	7429	39	7764	2571
22	9234	51865	38	369	48135
23	53271	6298	37	6973	3702
24	7304	60727	36	578	39273
25	61334	5152	35	182	4848
26	5359	9574	34	5785	0426
27	9380	73991	33	388	26009
28	73396	8406	32	4991	1594
29	7409	82816	31	593	17184
30	81418	7223	30	195	2777
31	5423	91626	29	3796	08374
32	9423	6026	28	398	3974
33	93420	5000422	27	2998	4999578
34	7412	4814	26	599	5186
35	801401	9203	25	198	0797
36	5385	13588	24	1798	86412
37	9366	7969	23	397	2031
38	13342	22347	22	0996	77653
39	7315	6721	21	594	3279
40	21283	31092	20	192	68908
41	5248	5459	19	89789	4541
42	9208	9822	18	386	0178
43	33165	44182	17	8983	55818
44	7117	8538	16	579	1462
45	41066	52891	15	175	47109
46	5010	7240	14	7770	2760
47	8951	61586	13	365	38414
48	52888	5928	12	6960	4072
49	6820	70267	11	554	29733
50	60749	4602	10	148	5398
51	4674	8933	9	5741	1067
52	8595	83261	8	334	16739
53	72515	7586	7	4927	2414
54	6426	91907	6	519	08093
55	80335	6224	5	111	3776
56	4240	5100539	4	3702	899461
57	8142	4849	3	293	5151
58	92040	9156	2	2883	0844
59	5934	13460	1	474	86540
60	9824	7760	0	063	2240

Minut.	18 Grad. Log. Sin.	18 Grad. Log. Tang.	Minut.	71 Grad. Log. Sin.	71 Grad. Log. Tang.
1	9.4903710	9.5126057	59	9.9781653	10.4877943
2	7592	6351	58	241	3649
3	11471	30641	57	0830	69359
4	5345	4927	56	418	5073
5	9216	9210	55	006	0790
6	23083	43490	54	79593	56510
7	6946	7766	53	180	2234
8	30806	52039	52	8766	47961
9	4661	6309	51	353	3691
10	8513	60575	50	7938	39425
11	42361	4838	49	523	5162
12	6205	9097	48	108	0903
13	50046	73353	47	6693	26647
14	3883	7606	46	277	2394
15	7716	81855	45	5860	18145
16	61545	6101	44	444	3899
17	5370	90344	43	026	09656
18	9192	4583	42	4609	5417
19	73010	8819	41	191	1181
20	6824	203052	40	3772	796948
21	80635	7282	39	354	2718
22	4442	11508	38	2934	88492
23	8245	5730	37	515	4270
24	92045	9950	36	095	0050
25	5840	24166	35	1674	75834
26	9633	8379	34	253	1621
27	5003421	32589	33	0832	67411
28	7206	6795	32	410	3205
29	10987	40999	31	69988	59001
30	4764	5199	30	566	4801
31	8538	9395	29	143	0605
32	22308	53589	28	8720	46411
33	6075	7779	27	296	2221
34	9838	61966	26	7872	38034
35	33597	6150	25	447	3850
36	7353	70331	24	022	29669
37	41105	4508	23	6597	5492
38	4853	8682	22	171	1318
39	8598	81853	21	5745	17147
40	52339	7021	20	318	2979
41	6077	91186	19	4891	08814
42	9811	5347	18	464	4653

Minut.	18 Grad.		Minut.	71 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
43	9.5063542	9.5299505	17	9.9764036	10.4700495
44	7268	303661	16	3608	696339
45	70992	7813	15	179	2187
46	4712	11961	14	2750	88039
47	8428	6107	13	321	3895
48	82141	20250	12	1891	79750
49	5850	4389	11	461	5611
50	9556	8526	10	030	1474
51	93258	32659	9	0599	67341
52	6956	6789	8	167	3211
53	100651	40916	7	59736	59084
54	4443	5040	6	303	4960
55	8031	9161	5	8870	0839
56	11716	53278	4	437	46722
57	5397	7393	3	004	2607
58	9074	61505	2	7570	38495
59	22749	5613	1	135	4387
60	6419	9719	0	6701	0281

Minut.	19 Grad.		Minut.	70. Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin .	Log. Tang.
1	9.5130086	9.5373821	59	9.9756265	10.4626179
2	3750	7920	58	5830	2080
3	7410	82017	57	394	17983
4	41067	6110	56	4957	3890
5	4721	90200	55	521	09800
6	8371	4287	54	083	5713
7	52017	8371	53	3646	1629
8	1660	402453	52	208	597547
9	9300	6531	51	2769	3469
10	62936	10606	50	330	89394
11	6569	4678	49	1891	5322
12	70198	8747	48	451	1253
13	3824	22813	47	011	77187
14	7447	6877	46	0570	3123
15	81066	30937	45	129	69063
16	4682	4994	44	49688	5006
17	8295	9048	43	246	0952
18	91904	43100	42	8804	56900

Minut.	19 Grad. Log. Sin.	19 Grad. Log. Tang.	Minut.	70 Grad. Log. Sin.	70 Grad. Log. Tang.
19	9.5195510	9.5447148	41	9.9748361	10.4552852
20	9112	51193	40	7918	48807
21	202711	5236	39	475	4764
22	6307	9276	38	031	0724
23	9899	63312	37	6587	36688
24	13488	7346	36	142	2654
25	7074	71377	35	5697	28623
26	20656	5405	34	252	4595
27	4235	9430	33	4806	0570
28	7811	83452	32	359	16548
29	31383	7471	31	3913	2529
30	4953	91487	30	466	08513
31	8518	5500	29	018	4500
32	42081	99511	28	2570	0489
33	5640	503519	27	122	496481
34	9196	7523	26	1673	2477
35	52749	11525	25	224	88475
36	6298	5524	24	0774	4476
37	9844	9521	23	324	0479
38	63387	23514	22	39873	76486
39	6927	7504	21	422	2496
40	70463	31492	20	8971	68508
41	3997	5477	19	519	4523
42	7526	9459	18	067	0541
43	81053	43438	17	7615	56562
44	4577	7415	16	162	2585
45	8097	51388	15	6709	48612
46	91614	5359	14	255	4641
47	5128	9327	13	5801	0673
48	8638	63292	12	346	36708
49	302146	7255	11	4891	2745
50	5650	71214	10	435	28786
51	9151	5171	9	3980	4829
52	12649	9125	8	523	0875
53	6143	83077	7	067	16923
54	9635	7025	6	2610	2975
55	23123	90971	5	152	09029
56	6608	4914	4	1694	5086
57	30090	8854	3	236	1146
58	3569	602792	2	0777	397208
59	7044	6727	1	318	3273
60	40517	10659	0	29858	89341

Minut.	20 Grad.		Minut.	69 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
1	9.5343986	9.5614588	59	9.9729398	10.4385412
2	7452	8515	58	8938	1485
3	50915	22439	57	477	77561
4	4375	6360	56	016	3640
5	7832	30278	55	7554	69722
6	61286	4194	54	092	5806
7	4737	8107	53	6629	1893
8	8184	42018	52	166	57982
9	71628	5925	51	5703	4075
10	5069	9831	50	239	0169
11	8508	53733	49	4775	46267
12	81943	7633	48	310	2367
13	5375	61530	47	3845	38470
14	8804	5424	46	380	4576
15	92230	9316	45	2914	0684
16	5653	73205	44	448	26795
17	9073	7091	43	1981	2909
18	402489	80975	42	514	19025
19	5903	4856	41	047	5144
20	9314	8735	40	0579	1265
21	12721	92611	39	110	07389
22	6126	6484	38	19642	3516
23	9527	700355	37	172	299645
24	22926	4223	36	8703	5777
25	6321	8088	35	233	1912
26	9713	11951	34	7762	88049
27	33103	5811	33	291	4189
28	6489	9669	32	6820	0331
29	9873	23524	31	348	76476
30	43253	7377	30	5876	2623
31	6630	31227	29	404	68773
32	50005	5074	28	4931	4926
33	3376	8919	27	475	1081
34	6745	42761	26	3984	57239
35	60110	6601	25	509	3399
36	3472	50438	24	035	49562
37	6832	4272	23	2560	5728
38	70189	8104	22	084	1896
39	3542	61934	21	1608	38066
40	6893	5761	20	132	4239
41	80240	9585	19	0655	0415
42	3585	73407	18	178	26593

Minut.	20 Grad. Log. Sin.	20 Grad. Log. Tang.	Minut.	69 Grad. Log. Sin.	69 Grad. Log. Tang.
43	9.5486927	9.5777226	17	9.9709701	10.4222774
44	90266	81043	16	223	18957
45	3602	4858	15	8744	5142
46	6935	8669	14	265	1331
47	500265	92479	13	7786	07521
48	3592	6286	12	306	3714
49	6916	800090	11	6826	199910
50	10237	3892	10	346	6108
51	3556	7691	9	5865	2309
52	6871	11488	8	383	88512
53	20184	5282	7	4902	4718
54	3494	9074	6	419	0926
55	6801	22864	5	3937	77136
56	30105	6651	4	454	3349
57	3406	30435	3	2970	69565
58	6704	4217	2	486	5783
59	9999	7997	1	002	2003
60	43292	41774	0	1517	58226

Minut.	21 Grad. Log. Sin.	21 Grad. Log. Tang.	Minut.	68 Grad. Log. Sin.	68 Grad. Log. Tang.
1	9.5546581	9.5845549	59	9.9701032	10.4154451
2	9868	9321	58	0547	0679
3	53152	53091	57	061	46909
4	6433	6859	56	699574	3141
5	9711	60624	55	087	39376
6	62987	4386	54	8600	5614
7	6259	8147	53	112	1853
8	9529	71904	52	7624	28096
9	72796	5660	51	136	4340
10	6060	9413	50	6647	0587
11	9321	83163	49	158	16837
12	82579	6912	48	5668	3088
13	5835	90657	47	177	09343
14	9088	4401	46	4687	5599
15	92338	8142	45	196	1858
16	5585	901881	44	3704	98119
17	8829	5617	43	212	4383
18	602071	9351	42	2720	0649

Minut.	21 Grad. Log. Sin.	21 Grad. Log. Tang.	Minut.	68 Grad. Log. Sin.	68 Grad. Log. Tang.
19	9.5605310	9.5913082	41	9.9692227	10.4086918
20	8546	6812	40	1734	3188
21	11779	20539	39	240	79461
22	5010	4263	38	0746	5737
23	8237	7985	37	252	2015
24	21462	31705	36	89757	68295
25	4685	5422	35	262	4577
26	7904	9138	34	8766	0862
27	31121	42851	33	270	57149
28	4335	6561	32	7773	3439
29	7546	50269	31	276	49731
30	40754	3975	30	6779	6025
31	3960	7679	29	281	2321
32	7163	61380	28	5783	38620
33	50363	5079	27	284	4921
34	3561	8776	26	4785	1224
35	6756	72470	25	286	27530
36	9948	6162	24	3786	3838
37	63137	9852	23	285	0148
38	6324	83540	22	2784	16466
39	9508	7225	21	283	2775
40	72689	90908	20	1781	09092
41	5868	4588	19	279	5411
42	9044	8267	18	0777	1733
43	82217	6001943	17	274	3998057
44	5387	5617	16	79771	4383
45	8555	9289	15	267	0711
46	91721	12958	14	8763	87042
47	4883	6625	13	258	3375
48	8043	20290	12	7753	79710
49	701200	3953	11	247	6047
50	4355	27613	10	6741	2387
51	7506	31271	9	235	68729
52	10656	4927	8	5728	5073
53	3802	8581	7	221	1419
54	6946	42233	6	4713	57767
55	20087	5882	5	205	4118
56	3226	9529	4	3697	0471
57	6362	53174	3	188	46826
58	9495	6817	2	2679	3183
59	32626	60457	1	169	39543
60	5754	4096	0	1659	5904

Minut.	22 Grad. Log. Sin.	22 Grad. Log. Tang.	Minut.	67 Grad. Log. Sin.	67 Grad. Log. Tang.
1	9.5738880	9.6067732	59	9.9671148	10.3932268
2	42003	71366	58	0637	28634
3	5123	4997	57	125	5003
4	8240	8627	56	69614	1373
5	51356	82254	55	101	17746
6	4468	5880	54	8588	4120
7	7578	9503	53	075	0497
8	60685	93124	52	7562	06876
9	3790	6742	51	048	3258
10	6892	100359	50	6533	899641
11	9991	3973	49	018	6027
12	73088	7586	48	5503	2414
13	6183	11196	47	4987	88804
14	9275	4804	46	471	5196
15	82364	8409	45	3954	1591
16	5450	2013	44	437	77987
17	8535	25615	43	2920	4385
18	91616	9214	42	402	0786
19	4695	32812	41	1884	67188
20	7772	6407	40	365	3593
21	800845	40000	39	0846	0000
22	3917	3591	38	326	56409
23	6986	7180	37	59806	2820
24	10052	50766	36	285	49234
25	3116	4351	35	8764	5649
26	6177	7934	34	243	2066
27	9236	61514	33	7721	38486
28	22292	5093	32	199	4907
29	5345	8669	31	6677	1331
30	8397	72243	30	153	27757
31	31445	5815	29	5630	4185
32	4491	9385	28	106	0615
33	7535	82953	27	4582	17047
34	40576	6519	26	057	3481
35	3615	90083	25	3532	09917
36	6651	3645	24	006	6355
37	9685	7205	23	2480	2795
38	52716	200762	22	1953	799238
39	5745	4318	21	426	95682
40	8771	7872	20	0899	2128
41	61795	11423	19	371	88577
42	4816	4973	18	49843	5027

Minut.	22 Grad.		Minut.	67 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
43	9.5867835	9.6218520	17	9.9649314	10.3781480
44	70851	22066	16	8785	77934
45	3865	5609	15	256	4391
46	6876	9150	14	7726	0850
47	9885	32690	13	195	67310
48	82892	6227	12	6665	3773
49	5896	9763	11	133	0237
50	8897	43296	10	5602	56704
51	91897	6827	9	069	3173
52	94893	50356	8	4537	49644
53	7888	3884	7	004	6116
54	900880	57409	6	3470	2591
55	3869	60932	5	2937	39068
56	6856	4454	4	402	5546
57	9841	7973	3	1868	2027
58	12823	71491	2	332	28509
59	5803	5006	1	0797	4994
60	8780	8519	0	261	1481

Minut.	23 Grad.		Minut.	66. Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin .	Log. Tang.
1	9.5921755	9.6282031	59	9.9639724	10.3717969
2	4728	5540	58	187	4460
3	7698	9048	57	8650	0952
4	30666	92553	56	112	07447
5	3631	6057	55	7574	3943
6	6594	9558	54	036	0442
7	9555	303058	53	6496	696942
8	42513	6556	52	5957	3444
9	5469	10052	51	417	89948
10	8422	3545	50	4877	6455
11	51373	7037	49	336	2963
12	4322	20527	48	3795	79473
13	7268	4015	47	253	5985
14	60212	7501	46	2711	2499
15	3154	30985	45	168	69015
16	6093	4468	44	1625	5532
17	9030	7948	43	082	2052
18	71965	41426	42	0538	58574

Minut.	23 Grad. Log. Sin.	23 Grad. Log. Tang.	Minut.	66 Grad. Log. Sin.	66 Grad. Log. Tang.
19	9.5974897	9.6344903	41	9.9629994	10.3655097
20	7827	8378	40	449	1622
21	80754	51850	39	8904	48150
22	3679	5321	38	358	4679
23	6602	8790	37	7812	1210
24	9523	62257	36	266	37743
25	92441	5722	35	6719	4278
26	5357	9185	34	172	0815
27	8271	72646	33	5624	27354
28	6001181	6106	32	076	3894
29	4090	9563	31	4527	0437
30	6997	83019	30	3978	16981
31	9901	6473	29	428	3527
32	12803	9925	28	2878	0075
33	5703	93375	27	328	06625
34	8600	6823	26	1777	3177
35	21495	400269	25	226	599731
36	4388	3714	24	0674	6286
37	7278	7156	23	122	2844
38	30166	10597	22	19569	89403
39	3052	4036	21	016	5964
40	5936	7473	20	8463	2527
41	8817	20908	19	7909	79092
42	41696	4342	18	355	5658
43	4573	7773	17	6800	2227
44	7448	31203	16	245	68797
45	50320	4631	15	5689	5369
46	3190	8057	14	133	1943
47	6057	41481	13	4576	58519
48	8923	4903	12	020	5097
49	61786	8324	11	3463	1676
50	4647	51743	10	2904	48257
51	7506	5160	9	346	4840
52	70362	8575	8	1787	1425
53	3216	61988	7	228	38012
54	6068	5400	6	0668	4600
55	8918	8810	5	108	1190
56	81765	72217	4	09548	27783
57	4611	5624	3	8987	4376
58	7454	9028	2	426	0972
59	90294	82431	1	7864	17569
60	3133	5831	0	302	4169

Minut.	24 Grad.		Minut.	65 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
1	9.6095969	9.6489230	59	9.9606739	10.3510770
2	8803	92628	58	176	07372
3	101635	6023	57	5612	3977
4	4465	9417	56	048	0583
5	7293	502809	55	4484	497191
6	10118	6199	54	3919	3801
7	2941	9587	53	354	0413
8	5762	12974	52	2788	87026
9	8580	6359	51	222	3641
10	21397	9742	50	1655	0258
11	4211	23123	49	088	76877
12	7023	6503	48	0520	3497
13	9833	9881	47	599952	0119
14	32641	33257	46	384	66743
15	5446	6631	45	8815	3369
16	8250	40004	44	246	59996
17	41051	3375	43	7676	6625
18	3850	6744	42	106	3256
19	6647	50112	41	6535	49888
20	9441	3477	40	5964	6523
21	52234	6841	39	393	3159
22	5024	60204	38	4821	39796
23	7812	3564	37	248	6436
24	60598	6923	36	3675	3077
25	3382	70280	35	102	29720
26	6164	3636	34	2528	6364
27	8944	6989	33	1954	3011
28	71721	80341	32	380	19659
29	4496	3692	31	0805	6308
30	7270	7041	30	229	2960
31	80041	590387	29	89653	09613
32	2809	3733	28	077	6267
33	5576	7076	27	8500	2924
34	8341	600418	26	7923	399582
35	91103	3758	25	345	6242
36	3864	7097	24	6767	2903
37	6622	10434	23	188	89566
38	9378	3769	22	5609	6231
39	202132	7103	21	030	2897
40	4884	20434	20	4450	79566
41	7635	3765	19	3869	6235
42	10382	27093	18	288	2907

Minut.	24 Grad.		Minut.	65 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
43	9.6213127	9.6630420	17	9.9582707	10.3369580
44	5871	3745	16	125	6255
45	8612	7069	15	1543	7931
46	21351	40391	14	0961	59609
47	4088	3711	13	378	6289
48	6824	7030	12	79794	2970
49	9557	50346	11	210	49654
50	32287	3662	10	8626	6338
51	5016	6975	9	041	3025
52	7743	60288	8	7456	39712
53	40467	3598	7	6870	6402
54	3190	6907	6	284	3093
55	5911	70214	5	5697	29786
56	8629	3519	4	110	6481
57	51346	6823	3	4522	3177
58	4060	80126	2	3934	19874
59	6772	3426	1	346	6574
60	9483	6725	0	2757	3275

Minut.	25 Grad.		Minut.	64 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
1	9.6262191	9.6690023	59	9.9572168	10.3309977
2	4897	3319	58	1578	6681
3	7601	6613	57	0988	3387
4	70303	9906	56	397	0094
5	3003	703197	55	69806	296803
6	5701	6486	54	215	3514
7	8397	9774	53	8623	0226
8	81090	13060	52	030	86940
9	3782	6345	51	7437	3655
10	6472	9628	50	6844	0372
11	9160	22910	49	250	77090
12	91845	6190	48	5656	3810
13	4529	9468	47	061	0532
14	7211	32745	46	4466	67255
15	5890	6020	45	3870	3980
16	302568	9294	44	274	0706
17	5243	42566	43	2678	57434
18	7917	5836	42	081	4164

Minut.	25 Grad.		Minut.	64 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
19	9.6310589	9.6749105	41	9.9561483	10.3250895
20	3258	52372	40	0886	47628
21	5926	5638	39	287	4362
22	8591	8902	38	59689	1097
23	1255	62165	37	089	37835
24	3916	5426	36	8490	4574
25	6576	8686	35	7890	1314
26	9233	71944	34	289	28056
27	31889	5201	33	6688	4799
28	4542	8456	32	087	1544
29	7194	81709	31	5485	18291
30	9844	4961	30	4882	5039
31	42491	8211	29	280	1789
32	5137	91460	28	3676	08540
33	7780	4708	27	073	5292
34	50422	7953	26	2469	2047
35	3062	801198	25	1864	198803
36	5699	4440	24	259	5560
37	8335	7682	23	0653	2318
38	60969	10921	22	047	89079
39	3601	4160	21	49441	5840
40	6231	7396	20	8834	2604
41	8859	20632	19	227	79368
42	71484	3865	18	7619	6135
43	4108	7098	17	011	2902
44	6731	30328	16	6402	69672
45	9351	3557	15	5793	6443
46	81969	6785	14	184	3215
47	4585	40011	13	4574	59989
48	7199	3236	12	3963	6764
49	9812	6459	11	352	3541
50	92422	9681	10	2741	0319
51	5030	52901	9	129	47099
52	7637	6120	8	1517	3880
53	400241	9338	7	0904	0662
54	2844	62553	6	291	37447
55	5445	5768	5	39677	4232
56	8044	8981	4	063	1019
57	10640	72192	3	8448	27808
58	3235	5402	2	7833	4598
59	5828	8611	1	218	1389
60	8420	81818	0	6602	18182

Minut.	26 Grad. Log. Sin.	26 Grad. Log. Tang.	Minut.	63 Grad. Log. Sin.	63 Grad. Log. Tang.
1	9.6421009	9.6885023	59	9.9535985	10.3114977
2	3596	8227	58	5369	1773
3	6182	91430	57	4751	08570
4	8765	4631	56	134	5369
5	31347	7831	55	3515	2169
6	3926	901030	54	2897	098970
7	6504	4226	53	278	5774
8	9080	7422	52	1658	2578
9	41654	10616	51	038	89384
10	4226	3809	50	0418	6191
11	6796	7000	49	29797	3000
12	9365	21089	48	175	79811
13	51931	3378	47	8553	6622
14	4496	6565	46	7931	3435
15	7058	9750	45	308	0250
16	9619	32934	44	6685	67066
17	62178	6117	43	061	3883
18	4735	9298	42	5437	0702
19	7290	42478	41	4813	57522
20	9844	5656	40	188	4344
21	72395	8833	39	3562	1167
22	4945	52009	38	2936	47991
23	7492	5183	37	310	4817
24	80038	8355	36	1683	1645
25	2582	61527	35	055	38473
26	5124	4697	34	0428	5303
27	7665	7865	33	19799	2135
28	90203	71032	32	171	28968
29	2740	4198	31	8541	5802
30	5274	7363	30	7912	2637
31	7807	80526	29	282	19474
32	500338	3687	28	6651	6313
33	2868	86847	27	020	3153
34	5395	90006	26	5389	09994
35	7920	3164	25	4757	6836
36	10444	6320	24	124	3680
37	2966	9474	23	3492	0526
38	5486	7002628	22	2858	2997372
39	8004	5780	21	224	4220
40	20521	8930	20	1590	1070
41	3035	12080	19	0956	87920
42	5548	5227	18	320	4773

Minut.	26 Grad. Log. Sin.	26 Grad. Log. Tang.	Minut.	63 Grad. Log. Sin.	63 Grad. Log. Tang.
43	9.6528059	9.7018374	17	9.9509685	10.2981626
44	30568	21519	16	049	78481
45	3075	4663	15	8412	5337
46	35581	7805	14	7775	2195
47	8084	30946	13	138	69054
48	40586	4086	12	6500	5914
49	3086	37225	11	5861	2775
50	5584	40362	10	223	59638
51	8081	3497	9	4583	6503
52	50575	6632	8	3944	3368
53	3068	9765	7	303	0235
54	5559	52897	6	2663	47103
55	8048	6027	5	022	3973
56	60536	9156	4	1380	0844
57	3021	62284	3	0738	37716
58	5505	5410	2	095	4590
59	7987	8535	1	499452	1465
60	70468	71659	0	8809	28341

Minut.	27 Grad. Log. Sin.	27 Grad. Log. Tang.	Minut.	62 Grad. Log. Sin.	62 Grad. Log. Tang.
1	9.6572946	9.7074781	59	9.9498165	10.2925219
2	5423	7902	58	7521	2098
3	7898	81022	57	6876	18978
4	80371	4141	56	230	5859
5	2842	7258	55	5585	2742
6	5312	90374	54	4938	09626
7	7780	3488	53	292	6512
8	90246	6601	52	3645	3399
9	2710	9713	51	2997	0287
10	5173	102824	50	349	897176
11	7634	5933	49	1700	4067
12	600093	9041	48	051	0959
13	2550	12148	47	0402	87852
14	5005	5254	46	89752	4746
15	7459	8358	45	101	1642
16	9911	21461	44	8450	78539
17	12361	4562	43	7799	5438
18	4810	7662	42	147	2338

Minut.	27 Grad. Log. Sin.	27 Grad. Log. Tang.	Minut.	62 Grad. Log. Sin.	62 Grad. Log. Tang.
19	9.6617257	9.7130761	41	9.9486495	10.2869239
20	9701	3859	40	5842	6141
21	22145	6956	39	189	3044
22	4586	40051	38	4535	59949
23	7026	3145	37	3881	6855
24	9464	6237	36	227	3763
25	31900	9329	35	2572	c671
26	4335	52419	34	1916	47581
27	6768	5508	33	260	4492
28	9199	8595	32	0604	1405
29	41628	61682	31	79947	38318
30	4056	4767	30	289	5233
31	6482	7851	29	8631	2149
32	8906	70933	28	7973	29067
33	51329	4014	27	314	5986
34	3749	7094	26	6655	2906
35	6168	80173	25	5995	19827
36	8586	3251	24	335	6749
37	61001	6327	23	4674	3637
38	3415	9402	22	013	0598
39	5828	92476	21	3352	07524
40	8238	5549	20	2689	4451
41	70647	8620	19	027	1380
42	3054	201690	18	1364	798310
43	5459	4759	17	0700	5241
44	7863	7827	16	036	2173
45	80265	10893	15	69372	89107
46	2665	3958	14	8707	6042
47	5064	7022	13	042	2978
48	7461	20085	12	7376	79915
49	9856	3147	11	6710	6853
50	92250	6207	10	043	3793
51	4642	9266	9	5376	0734
52	7032	32324	8	4708	67676
53	9420	35381	7	040	4619
54	701807	48436	6	3371	1564
55	4192	1490	5	2702	58510
56	6576	4543	4	032	5457
57	8958	7595	3	1362	2405
58	11338	50646	2	0692	49354
59	3716	3695	1	021	0305
60	6093	6744	0	59349	3256

Minut.	28 Grad.		Minut.	61 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
1	9.6718468	9.7259791	59	9.9458677	10.2740209
2	20841	62837	58	005	37163
3	3213	5881	57	7332	4119
4	5583	8925	56	6659	1075
5	7952	71967	55	5985	28033
6	30319	5008	54	310	4992
7	2684	8048	53	4636	1952
8	5047	81087	52	3960	18913
9	7409	4124	51	285	5876
10	9769	7161	50	2609	2839
11	42128	90196	49	1932	09804
12	4485	3230	48	255	6770
13	6840	6263	47	0577	3737
14	9194	9295	46	49899	0705
15	51546	302325	45	9220	697675
16	3896	5354	44	8541	4646
17	6245	8383	43	7862	1617
18	8592	11410	42	182	88590
19	60937	4436	41	6501	5564
20	3281	7460	40	5821	2540
21	5623	20484	39	139	79516
22	7963	3506	38	4457	6494
23	70302	6527	37	3775	3473
24	2640	9547	36	092	0453
25	4975	32566	35	2409	67434
26	7309	5584	34	1725	4416
27	9642	8601	33	041	1399
28	81972	41616	32	0356	58384
29	4301	4631	31	39671	5369
30	6629	7644	30	8985	2356
31	8955	50656	29	38299	49344
32	91279	3667	28	7612	6333
33	593602	6677	27	6925	3323
34	795923	9685	26	238	0315
35	8243	62693	25	5549	37307
36	6800560	5699	24	4861	4301
37	2877	8705	23	172	1295
38	5191	71709	22	3482	28291
39	7504	4712	21	2792	5288
40	9816	7714	20	102	2286
41	82126	80715	19	1411	19285
42	14434	3714	18	0720	6286

Minut.	28 Grad. Log. Sin.	28 Grad. Log. Tang.	Minut.	61 Grad. Log. Sin.	61 Grad. Log. Tang.
43	9.6816741	9.7386713	17	9.9430028	10.2613287
44	9046	9710	16	29335	0290
45	21349	92707	15	8643	07293
46	3651	5702	14	7949	4298
47	5952	8696	13	255	1304
48	8250	401689	12	6561	598311
49	30548	4681	11	5866	5319
50	2843	7672	10	171	2328
51	5137	10662	9	4476	89338
52	7430	3650	8	3779	6350
53	9720	6638	7	083	3362
54	42010	9624	6	2386	0376
55	4297	22609	5	1688	77391
56	6583	5594	4	0990	4406
57	8868	8577	3	291	1423
58	51151	31559	2	19592	68441
59	3432	4540	1	8893	5460
60	5712	7520	0	193	2480

Minut.	29 Grad. Log. Sin.	29 Grad. Log. Tang.	Minut.	60 Grad. Log. Sin.	60 Grad. Log. Tang.
1	9.6857991	9.7440499	59	9.9417492	10.2559501
2	60267	3476	58	6791	6524
3	2542	6453	57	090	3547
4	4816	9428	56	5388	0572
5	7088	52403	55	4685	47597
6	9359	5376	54	3982	4624
7	71628	8349	53	279	1651
8	3895	61320	52	2575	38680
9	6161	4290	51	1871	5710
10	8425	7259	50	166	2741
11	80688	70227	49	0461	29773
12	2949	3194	48	09755	6806
13	5209	6160	47	048	3840
14	7467	9125	46	8342	0875
15	9723	82089	45	7634	17911
16	91978	5052	44	6927	4948
17	4232	8013	43	219	1987
18	6484	90974	42	5510	09026

Minut.	29 Grad.		Minut.	60 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
19	9.6898734	9.7493934	41	9.9404801	10.2506066
20	900983	6892	40	091	3108
21	3231	9850	39	3381	0150
22	5476	502806	38	2670	497194
23	7721	5762	37	1959	4238
24	9964	8716	36	248	1284
25	12205	11669	35	0535	88331
26	4445	4622	34	399823	5378
27	6683	7573	33	110	2427
28	8919	20523	32	8396	79477
29	21155	3472	31	7682	6528
30	3388	6420	30	6968	3580
31	5620	9368	29	253	0632
32	7851	32314	28	5537	67686
33	30080	5259	27	4821	4741
34	2308	8203	26	105	1797
35	4534	41146	25	3388	58854
36	6758	4088	24	2671	5912
37	8981	7029	23	1953	2971
38	41203	9969	22	234	0031
39	3423	52908	21	0515	47092
40	5642	5846	20	89796	4154
41	7859	8783	19	076	1217
42	50074	61718	18	8356	38282
43	2288	4653	17	7635	5347
44	4501	7587	16	6914	2413
45	6712	70520	15	192	29480
46	8922	3452	14	5470	6548
47	61130	6383	13	4747	3617
48	3336	9313	12	024	0687
49	5541	82242	11	3300	17758
50	7745	5170	10	2576	4830
51	9947	8096	9	1851	1904
52	72148	91022	8	126	08978
53	4347	3947	7	0400	6053
54	6545	6871	6	79674	3129
55	8741	9794	5	8947	0206
56	80936	602716	4	220	397284
57	3129	5637	3	7492	4363
58	5321	8557	2	6764	1443
59	7511	11476	1	035	88524
60	9700	4394	0	5306	5606

30 Grad.

Minut.	30 Grad. Log. Sin.	30 Grad. Log. Tang.	Minut.	59 Grad. Log. Sin.	59 Grad. Log. Tang.
1	9.6991887	9.7617311	59	9.9374577	10.2382689
2	4073	20227	58	3847	79773
3	6258	3142	57	116	6858
4	8441	6056	56	2385	3944
5	7000622	8969	55	1653	1031
6	2802	31881	54	0921	68119
7	4981	4792	53	189	5208
8	7158	7702	52	69456	2298
9	9334	40612	51	8722	59388
10	11508	3520	50	7988	6480
11	3681	6427	49	254	3573
12	5852	9334	48	6519	0666
13	8022	52239	47	5783	47761
14	20190	5143	46	047	4857
15	2357	8047	45	4311	1953
16	4523	60949	44	3574	39051
17	6687	3851	43	2836	6149
18	8849	5751	42	098	3249
19	31011	9651	41	1360	0349
20	3170	72550	40	0621	27450
21	5329	5448	39	59881	4552
22	7486	8344	38	141	1656
23	9641	81240	37	8401	18760
24	41795	4135	36	7660	5865
25	3947	7029	35	6918	2971
26	6099	9922	34	177	0078
27	8248	92814	33	5434	07186
28	50397	5705	32	4691	4295
29	2543	8596	31	3948	1404
30	4689	701485	30	204	298515
31	6833	4373	29	2459	5627
32	8975	7261	28	1715	2739
33	61116	10147	27	0969	89853
34	3256	3033	26	223	6967
35	5394	5917	25	49477	4083
36	7531	8801	24	8730	1199
37	9667	21684	23	7983	78316
38	71801	4566	22	235	5434
39	3933	7447	21	6486	2553
40	6064	30327	20	5738	69673
41	8194	3206	19	4988	6794
42	80323	6084	18	238	3916

Minut.	30 Grad.		Minut.	59 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
43	9.7082450	9.7738961	17	9.9343488	10.2261039
44	4575	41838	16	2737	58162
45	6699	4713	15	1986	5287
46	8822	7588	14	234	2412
47	90943	50462	13	0482	49538
48	3063	3334	12	39729	6666
49	5182	6206	11	8976	3794
50	97299	9077	10	222	0923
51	9415	61947	9	7467	38053
52	101529	4816	8	6713	5184
53	3642	7685	7	5957	2315
54	5753	70552	6	201	29448
55	7863	3418	5	4445	6582
56	9972	6284	4	3688	3716
57	12080	9149	3	2931	0851
58	4186	82012	2	173	17988
59	6290	4875	1	1415	5125
60	8393	7737	0	0656	2263

Minut.	31 Grad.		Minut.	58. Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
1	9.7120495	9.7790599	59	9.9329897	10.2209401
2	2596	3459	58	137	6541
3	4695	6318	57	8376	3682
4	6792	9177	56	7616	0823
5	8889	802034	55	6854	197966
6	30983	4891	54	092	5109
7	3077	7747	53	5330	2253
8	5169	10602	52	4567	89398
9	7260	3456	51	3804	6544
10	9349	6309	50	040	3691
11	41437	9162	49	2276	0838
12	3524	22013	48	1511	77987
13	5609	4864	47	0746	5136
14	7693	7713	46	19980	2287
15	9776	30562	45	213	69438
16	51857	3410	44	8447	6590
17	3937	6258	43	7679	3742
18	6015	9104	42	6911	0896

Minut.	31 Grad.		Minut.	58 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
19	9.7158092	9.7841949	41	9.9316143	10.2158051
20	60168	4794	40	5374	5206
21	2243	7638	39	4605	2362
22	4316	50481	38	3835	49519
23	6387	3323	37	065	6677
24	8458	6164	36	2294	3836
25	70526	9004	35	1522	0996
26	2594	61844	34	0750	38156
27	4660	4682	33	09978	5318
28	6725	7520	32	205	2480
29	8789	70357	31	8432	29643
30	80851	3193	30	7658	6807
31	2912	6028	29	6883	3972
32	4971	8863	28	109	1137
33	7030	81696	27	5333	18304
34	9086	4529	26	4557	5471
35	91142	7361	25	3781	2639
36	3196	90192	24	004	09808
37	5249	3023	23	2226	6977
38	7300	5852	22	1448	4148
39	9350	8681	21	0670	1319
40	7201399	901508	20	299891	098492
41	3447	4335	19	112	5665
42	5493	7161	18	8332	2839
43	7538	9987	17	7551	0013
44	9581	12811	16	6770	87189
45	11623	5635	15	5989	4365
46	3664	8458	14	207	1542
47	5704	21280	13	4424	78720
48	7742	4101	12	3641	5899
49	9779	6921	11	2857	3079
50	21814	9741	10	073	0259
51	3848	32560	9	1289	67440
52	5881	5378	8	0504	4622
53	7913	8195	7	89718	1805
54	9943	41011	6	8932	58989
55	31972	3827	5	145	6173
56	4000	6641	4	7358	3359
57	6026	9455	3	6571	0545
58	8051	52268	2	5783	47732
59	40075	5081	1	4994	4919
60	2097	7892	0	205	2108

Minut.	32 Grad. Log. Sin.	32 Grad. Log. Tang.	Minut.	57 Grad. Log. Sin.	57 Grad. Log. Tang.
1	9.7244118	9.7960703	59	9.9283415	10.2039297
2	6138	3513	58	2625	6487
3	8156	6322	57	1834	3678
4	50174	9130	56	043	0870
5	2189	71938	55	0251	28062
6	4204	4745	54	79459	5255
7	6217	7551	53	8666	2449
8	8229	80356	52	7873	19644
9	60240	3160	51	079	6840
10	2249	5964	50	6285	4036
11	4257	8767	49	5490	1233
12	6264	91569	48	4695	08431
13	8269	4370	47	3899	5630
14	70273	7170	46	103	2830
15	2276	9970	45	2306	0030
16	4278	002769	44	1509	1997231
17	6278	5567	43	0711	4433
18	8277	8365	42	69913	1635
19	80275	11161	41	114	88839
20	2271	3957	40	8314	3248
21	4267	6752	39	7514	248
22	6260	9546	38	6714	0454
23	8253	22340	37	5913	77660
24	90244	5133	36	112	4867
25	2234	7925	35	4310	2075
26	4223	30716	34	3507	69284
27	6211	3506	33	2704	6494
28	8197	6296	32	1901	3704
29	300182	9085	31	096	0915
30	2165	41873	30	0292	58127
31	4148	4661	29	59487	5339
32	6129	7447	28	8681	2553
33	8109	50233	27	7875	49767
34	10087	3019	26	069	6981
35	2064	5803	25	6261	4197
36	4040	8587	24	5454	1413
37	7015	61370	23	4646	38630
38	989	4152	22	3837	5848
39	9961	6933	21	028	3067
40	21932	9714	20	2218	0286
41	3902	72494	19	1408	27506
42	5870	5273	18	0597	4727

Minut.	32 Grad. Log. Sin.	32 Grad. Log. Tang.	Minut.	57 Grad. Log. Sin.	57 Grad. Log. Tang.
43	9.7327837	9.8078052	17	9.9249786	10.1921948
44	9803	80829	16	8974	19171
45	31768	3606	15	161	6394
46	3731	6383	14	7349	3617
47	5693	9158	13	6535	0842
48	7654	91933	12	5721	08067
49	9614	4707	11	4907	5293
50	41572	7480	10	092	2520
51	3529	100253	9	3277	899747
52	5485	3025	8	2461	6975
53	7440	5796	7	1644	4204
54	9393	8566	6	0827	1434
55	51345	11336	5	010	88664
56	3296	4105	4	39191	5895
57	5246	6873	3	8373	3127
58	7195	9641	2	7554	0359
59	9142	22408	1	6734	77592
60	61088	5174	0	5914	4826

Minut.	33 Grad. Log. Sin.	33 Grad. Log. Tang.	Minut.	56. Grad. Log. Sin.	56. Grad. Log. Tang.
1	9.7363032	9.8127939	59	9.9235093	10.1872061
2	4976	30704	58	4272	69296
3	6918	3468	57	3405	6532
4	8859	6231	56	2628	3769
5	70799	8993	55	1805	1007
6	2737	41755	54	0982	58245
7	4675	4516	53	158	5484
8	6611	7277	52	29334	2723
9	8546	50036	51	8509	49964
10	80479	2795	50	7684	7205
11	2412	5554	49	6858	4446
12	4343	8311	48	032	1689
13	6273	61068	47	5205	38932
14	7201	3824	46	4377	6176
15	90129	6580	45	3549	3420
16	2055	9335	44	2721	0665
17	3980	72089	43	1891	27911
18	5904	4842	42	062	5158

Minut.	33 Grad.		Minut.	56 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
19	9.7397827	9.8177595	41	9.9220232	10.1822405
20	9748	80347	40	19401	19653
21	401668	3098	39	8570	6902
22	3587	5849	38	7738	4151
23	5505	8599	37	6906	1401
24	7421	91348	36	073	08652
25	9337	4096	35	5240	5904
26	11251	6844	34	4406	3156
27	3164	9592	33	3572	0408
28	5075	202338	32	2737	797662
29	6986	5084	31	1902	4916
30	8895	7829	30	066	2171
31	20803	10574	29	0229	89426
32	2710	3317	28	09393	6683
33	4616	6060	27	8555	3940
34	6520	8803	26	7717	1197
35	8423	21545	25	6878	78455
36	30325	4286	24	039	5714
37	2226	7026	23	5200	2974
38	4126	9766	22	4360	0234
39	6024	32505	21	3519	67495
40	7921	5244	20	2678	4756
41	9817	7981	19	1836	2019
42	41712	40719	18	0994	59281
43	3606	3455	17	151	6545
44	5498	6191	16	199308	3809
45	7390	8926	15	8464	1074
46	9280	51660	14	7619	48340
47	51169	4394	13	6775	5606
48	3056	7127	12	5929	2873
49	4943	9860	11	083	0140
50	6828	62592	10	4237	37408
51	8712	5323	9	3390	4677
52	60595	8053	8	2542	1947
53	2477	70783	7	1694	29217
54	4358	3513	6	0845	6487
55	6237	6241	5	89996	3759
56	8115	8969	4	146	1031
57	9992	81696	3	8296	18304
58	71868	4423	2	7445	5577
59	3743	7149	1	6594	2851
60	5617	9874	0	5742	0126

Minut.	34 Grad.		Minut.	55 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
1	9.7477489	9.8292599	59	9.9184890	10.1707401
2	9360	5323	58	037	4677
3	81230	8047	57	3183	1953
4	3099	300769	56	2329	699231
5	4967	3492	55	1475	6508
6	6833	6213	54	0620	3787
7	8698	8934	53	79764	1066
8	90562	11654	52	8908	88346
9	2425	4374	51	051	5626
10	4287	7093	50	7194	2907
11	6148	9811	49	6336	0189
12	8007	22529	48	5478	77471
13	9866	5246	47	4619	4754
14	501723	7963	46	3760	2037
15	3579	30679	45	2900	69321
16	5434	3394	44	040	6606
17	7287	6109	43	1179	3891
18	9140	8823	42	0317	1177
19	10991	41536	41	69455	58464
20	2842	4249	40	8593	5751
21	4691	6961	39	7730	3039
22	6538	9673	38	6866	0327
23	8385	52384	37	002	47616
24	20231	5094	36	6135	4906
25	2075	7804	35	4272	2196
26	3919	60513	34	3406	39487
27	5761	3221	33	2539	6779
28	7602	5929	32	1673	4071
29	9442	8636	31	0805	1364
30	31280	71343	30	59937	28657
31	3118	4049	29	069	5951
32	4954	6755	28	8200	3245
33	6790	9460	27	7330	0540
34	8624	82164	26	6460	17836
35	40457	4867	25	5589	5133
36	2288	7571	24	4718	2429
37	4119	90273	23	3846	09727
38	5949	2975	22	2974	7025
39	7777	5676	21	101	4324
40	9604	8377	20	1228	1623
41	51431	401077	19	0354	598923
42	3256	3776	18	49479	6224

Minut.	34 Grad. Log. Sin.	34 Grad. Log. Tang.	Minut.	55 Grad. Log. Sin.	55 Grad. Log. Tang.
43	9.7555080	9.8406475	17	9.9148604	10.1593525
44	6902	9174	16	7729	0826
45	8724	11871	15	6852	88129
46	60544	4569	14	5976	5431
47	2364	7265	13	099	2735
48	4182	9961	12	4221	0039
49	5999	22657	11	3342	77343
50	7815	5351	10	2464	4649
51	9630	8046	9	1584	1954
52	71444	30739	8	0704	69261
53	3256	3432	7	39824	6568
54	5068	6125	6	8943	3875
55	6878	8817	5	7061	1183
56	8687	41508	4	179	58492
57	80495	4199	3	6296	5801
58	2302	6889	2	5413	3111
59	4108	9579	1	4530	0421
60	5913	52268	0	3645	47732

Minut.	35 Grad. Log. Sin.	35 Grad. Log. Tang.	Minut.	54 Grad. Log. Sin.	54 Grad. Log. Tang.
1	9.7587717	9.8454956	59	9.9132760	10.1545044
2	9519	7644	58	1875	2356
3	91321	60332	57	0989	39668
4	3121	3018	56	102	6982
5	4920	5705	55	29215	4295
6	6718	8390	54	8328	1610
7	8515	71075	53	7440	28925
8	600311	3760	52	6551	6240
9	2106	6444	51	5662	3556
10	3899	9127	50	4772	0873
11	5692	81810	49	3882	18190
12	7483	4492	48	2991	5508
13	9274	7174	47	099	2826
14	11063	9855	46	1207	0145
15	2851	92536	45	0315	07464
16	4638	5216	44	19422	4784
17	6424	7896	43	8528	2104
18	8208	500575	42	7634	499425

Minut.	35 Grad. Log. Sin.	35 Grad. Log. Tang.	Minut.	54 Grad. Log. Sin.	54 Grad. Log. Tang.
19	9.7619992	9.8503253	41	9.9116739	10.1496747
20	21775	5931	40	5844	4069
21	3556	8608	39	4948	1392
22	5337	11285	38	051	88715
23	7116	3961	37	3155	6039
24	8894	6637	36	2257	3363
25	30671	9312	35	1359	0688
26	2447	21987	34	0460	78013
27	4222	4661	33	09561	5339
28	5996	7335	32	8661	2665
29	7769	30008	31	7761	69992
30	9540	2680	30	6860	7320
31	41311	5352	29	5959	4648
32	3080	8023	28	057	1977
33	4849	40694	27	4155	59306
34	6616	3365	26	3251	6635
35	8382	6034	25	2348	3966
36	50147	8704	24	1444	1296
37	1911	51372	23	0539	48628
38	3674	4041	22	099634	5959
39	5436	6708	21	8728	3292
40	7197	9376	20	7821	0624
41	8957	62042	19	6915	37958
42	60715	4708	18	007	5292
43	2473	7374	17	5099	2626
44	4229	70039	16	4190	29961
45	5985	2704	15	3281	7296
46	7739	5368	14	2371	4632
47	9492	8031	13	1461	1969
48	71244	80694	12	0550	19306
49	2996	3357	11	89639	6643
50	4746	6019	10	8727	3981
51	6494	8680	9	7814	1320
52	8242	91341	8	6901	08659
53	9989	4002	7	5988	5998
54	81735	6661	6	073	3339
55	3480	9321	5	4159	0679
56	5223	601980	4	3243	398020
57	6966	4638	3	2327	5362
58	8707	7296	2	1411	2704
59	90448	9954	1	0494	0046
60	2187	12610	0	79576	87390

36 Grad.

Minut.	36 Grad. Log. Sin.	36 Grad. Log. Tang.	Minut.	53 Grad. Log. Sin.	53 Grad. Log. Tang.
1	9.7693925	9.8615267	59	9.9078658	10.1384733
2	5662	7923	58	7740	2077
3	7398	20578	57	6820	79422
4	9134	3233	56	5901	6767
5	700868	5887	55	4980	4113
6	2601	8541	54	059	1459
7	4332	31195	53	3138	68805
8	6063	3848	52	2216	6152
9	7793	6500	51	1293	3500
10	9522	9152	50	0370	0848
11	11249	41803	49	69446	58197
12	2976	4454	48	8522	5546
13	4702	7105	47	7597	2895
14	6426	9755	46	6671	0245
15	8150	52404	45	5745	47596
16	9872	5053	44	4819	4947
17	21593	7702	43	3892	2298
18	3314	60350	42	2964	39650
19	5033	2997	41	036	7003
20	6751	5644	40	1107	4356
21	8468	8291	39	0177	1709
22	30185	70937	38	59247	29063
23	1900	3583	37	8317	6417
24	3614	6228	36	7386	3772
25	5327	8873	35	6454	1127
26	7039	81517	34	5522	18483
27	8749	4160	33	4589	5840
28	40459	6804	32	3656	3196
29	2168	9446	31	2722	0554
30	3876	92089	30	1787	07911
31	5583	4731	29	0852	5269
32	7288	7372	28	49916	2628
33	8993	700013	27	8980	299987
34	50697	2653	26	043	7347
35	2399	5293	25	7106	4707
36	4101	7933	24	6168	2067
37	5801	10572	23	5230	89428
38	7501	3210	22	4291	6790
39	9199	5848	21	3351	4152
40	60897	8486	20	2411	1514
41	2593	21123	19	1470	78877
42	4289	3760	18	0529	6240

Minut.	36 Grad. Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	53 Grad. Log. Sin.	Log. Tang.
43	9.7765983	9.8726396	17	9.9039587	10.1273604
44	7676	9032	16	8644	0968
45	9369	31668	15	7701	68332
46	71060	4302	14	6757	5698
47	2750	6937	13	5813	3063
48	4439	9571	12	4868	0429
49	6128	42204	11	3923	57796
50	7815	4838	10	2977	5162
51	9501	7470	9	2031	2530
52	81186	50102	8	1084	49898
53	2870	2734	7	0136	7266
54	4553	5365	6	29188	4635
55	6235	7996	5	8239	2004
56	7916	60627	4	7289	39373
57	9596	3257	3	6339	6743
58	91275	5886	2	5389	4114
59	2953	8515	1	4438	1485
60	4630	71144	0	3486	8856

Minut.	37 Grad. Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	52 Grad. Log. Sin.	Log. Tang.
1	9.7796306	9.8773772	59	9.9022534	10.1226228
2	7981	6400	58	1581	3600
3	9655	9027	57	0628	0973
4	801328	81654	56	19674	18346
5	3000	4281	55	8719	5719
6	4671	6907	54	7764	3093
7	6341	9533	53	6808	0467
8	8010	92158	52	5852	07842
9	9677	4782	51	4895	5218
10	11344	7407	50	3938	2593
11	3010	8800031	49	2980	99969
12	4675	2654	48	2021	7346
13	6339	5277	47	1062	4723
14	8002	7900	46	0102	2100
15	9664	10522	45	09142	89478
16	21324	3144	44	8181	6856
17	2984	5765	43	7219	4235
18	4643	8386	42	6257	1614

Minut.	37 Grad.		Minut.	52 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
19	9.7826301	9.8821007	41	9.9005294	10.1178993
20	7958	3627	40	4331	6373
21	9614	6246	39	3367	3754
22	31268	8866	38	2403	1134
23	2922	31484	37	1438	68516
24	4575	4103	36	0472	5897
25	6227	6721	35	8999506	3279
26	7878	9338	34	8539	0662
27	9528	41956	33	7572	58044
28	41177	4572	32	6604	5428
29	2834	7189	31	5636	2811
30	4471	9805	30	4667	0195
31	6117	52420	29	3697	47580
32	7762	5035	28	2727	4965
33	9406	7650	27	1756	2350
34	51049	60264	26	0784	39736
35	2691	2878	25	89812	7122
36	4332	5492	24	8840	4508
37	5972	8105	23	7867	1895
38	7611	70718	22	6893	29282
39	9249	3330	21	5919	6670
40	60886	5942	20	4944	4058
41	2522	8554	19	3968	1446
42	4157	81165	18	2992	18835
43	5791	3775	17	015	6225
44	7424	6386	16	1038	3614
45	9056	8996	15	0060	1004
46	70687	91605	14	79082	08395
47	2317	4214	13	8103	5786
48	3946	6823	12	7123	3177
49	5574	9432	11	6143	0568
50	7202	902040	10	5162	097960
51	8828	4647	9	4181	5353
52	80453	7254	8	3199	2746
53	2077	9861	7	2216	0139
54	3701	12468	6	1233	87532
55	5323	5074	5	0249	4926
56	6944	7679	4	69265	2321
57	8565	20285	3	8280	79715
58	90184	2890	2	7294	7110
59	1802	5494	1	6308	4506
60	3420	8098	0	5321	1902

Minut.	38 Grad.		Minut.	51 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
1	9.7895036	9.8930702	59	9.8964334	10.1069298
2	6652	3306	58	3346	6694
3	8266	5909	57	2358	4091
4	9880	8511	56	1369	1489
5	01493	41114	55	0379	58886
6	3104	3715	54	59389	6285
7	4715	6317	53	8398	3683
8	6325	8918	52	7406	1082
9	7933	51519	51	6414	48481
10	9541	4119	50	5422	5881
11	11148	6719	49	4429	3281
12	2754	9319	48	3435	0681
13	4359	61918	47	2440	38082
14	5963	4517	46	1445	5483
15	7566	7116	45	0450	2884
16	9168	9714	44	49453	0286
17	20769	72312	43	8457	27688
18	2369	4910	42	7459	5090
19	3968	7507	41	6461	2493
20	5568	80104	40	5463	19896
21	7163	2700	39	4463	7300
22	8760	5296	38	3464	4704
23	30355	7892	37	2463	2108
24	1949	90487	36	1462	09513
25	3543	3082	35	0461	6918
26	5135	5677	34	39458	4323
27	6727	8271	33	8456	1729
28	8317	000865	32	7452	0999135
29	9907	3459	31	6448	6541
30	41496	6052	30	5444	3948
31	3083	8645	29	4439	1355
32	4670	11237	28	3433	88763
33	6256	3830	27	2426	6170
34	7841	6422	26	1419	3578
35	9425	9013	25	0412	0987
36	51008	21604	24	29404	78396
37	2590	4195	23	8395	5805
38	4171	6786	22	7385	3214
39	5751	9376	21	6375	0624
40	7330	31966	20	5356	68034
41	8909	4555	19	4354	5445
42	60486	7144	18	3342	2856

Minut.	38 Grad. Log. Sin.	38 Grad. Log. Tang.	Minut.	51 Grad. Log. Sin.	51 Grad. Log. Tang.
43	9.7962062	9.9039733	17	9.8922329	10.0960267
44	3638	42321	16	1316	57679
45	5212	4910	15	0303	5090
46	6786	7497	14	19289	2503
47	8359	50085	13	8274	49915
48	9930	2672	12	7258	7328
49	71501	5259	11	6242	4741
50	3071	7845	10	5226	2155
51	4640	60431	9	4208	39569
52	6208	3017	8	3191	6983
53	7775	5603	7	2172	4397
54	9341	8188	6	1153	1812
55	80906	70773	5	0133	29227
56	2470	3357	4	09113	6643
57	4034	5941	3	8092	4059
58	5596	8525	2	7071	1475
59	7158	81109	1	6049	18891
60	8718	3692	0	5026	6308

Minut.	39 Grad. Log. Sin.	39 Grad. Log. Tang.	Minut.	50 Grad. Log. Sin.	50 Grad. Log. Tang.
1	9.7990278	9.9086275	59	9.8904003	10.0913725
2	1836	8858	58	2979	1142
3	3394	91440	57	1954	08560
4	4951	4022	56	0929	5978
5	6507	6603	55	899903	3397
6	8062	9185	54	8877	0815
7	9616	101766	53	7850	898234
8	8001169	4347	52	6822	5653
9	2721	6927	51	5794	3073
10	4272	9507	50	4765	0493
11	5823	2087	49	3736	87913
12	7372	4666	48	2706	5334
13	8921	7245	47	1675	2755
14	10468	9824	46	0644	0176
15	2015	22403	45	89612	77597
16	3561	4981	44	8580	5019
17	5106	7559	43	7547	2441
18	6649	30137	42	6513	69863

Minut.	39 Grad.		Minut.	50 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
19	9.8018192	9.9132714	41	9.8885479	10.0867286
20	9735	5291	40	4444	4709
21	21276	7868	39	3408	2132
22	2816	40444	38	2372	59556
23	4355	3020	37	1335	6980
24	5894	5596	36	0298	4404
25	7431	8171	35	79260	1829
26	8968	50747	34	8221	49253
27	30504	3322	33	7182	6678
28	2038	5896	32	6142	4104
29	3572	8471	31	5102	1529
30	5105	61045	30	4061	38955
31	6637	3618	29	873019	6382
32	8168	6192	28	1977	3808
33	9699	8765	27	0934	1235
34	41228	71338	26	69890	28662
35	2757	3911	25	8846	6089
36	4284	6483	24	7801	3517
37	5811	9055	23	6756	0945
38	7336	81627	22	5710	18373
39	8861	4198	21	4663	5802
40	50385	6769	20	3616	3231
41	1908	9340	19	2568	0660
42	3430	91911	18	1519	08089
43	4951	4481	17	0470	5519
44	6472	7051	16	59420	2949
45	7991	9621	15	8370	0379
46	9510	202191	14	7319	797809
47	61027	4760	13	6267	5240
48	2544	7329	12	5215	2671
49	4060	9898	11	4162	0102
50	5575	12466	10	3109	87534
51	7089	5034	9	2055	4966
52	8602	7602	8	1000	2398
53	70114	20170	7	49945	79830
54	1626	2737	6	8889	7263
55	3136	5304	5	7832	4696
56	4646	7871	4	6775	2129
57	6154	30437	3	5717	69563
58	7662	3004	2	4659	6996
59	9169	5570	1	3599	4430
60	80675	8135	0	2540	1865

40 Grad.

Minut.	40 Grad. Log. Sin.	40 Grad. Log. Tang.	Minut.	49 Grad. Log. Sin.	49 Grad. Log. Tang.
1	9.8082180	9.9240701	59	9.8841479	10.0759299
2	3684	3266	58	0418	6734
3	5188	5831	57	39357	4169
4	6690	8396	56	8294	1604
5	8192	50960	55	7232	49040
6	9692	3524	54	6168	6476
7	91192	6088	53	5104	3912
8	2691	8652	52	4039	1348
9	4189	61215	51	2974	38785
10	5686	3778	50	1908	6222
11	7182	6341	49	0841	3659
12	8678	8904	48	29774	1096
13	100172	71466	47	8706	28534
14	1666	4028	46	7638	5972
15	3159	6590	45	6568	3410
16	4650	9152	44	5499	0848
17	6141	81713	43	4428	18287
18	7631	4274	42	3357	5726
19	9121	6835	41	2285	3165
20	10609	9396	40	1213	0604
21	2096	91956	39	0140	08044
22	3583	4516	38	19067	5484
23	5069	7076	37	7992	2924
24	6554	6936	36	6918	0364
25	8038	302195	35	5842	697805
26	9521	4755	34	4766	5245
27	21003	7314	33	3689	2686
28	2484	9872	32	2612	0128
29	3965	12431	31	1534	87569
30	5444	4989	30	0455	5011
31	6923	7547	29	09376	2453
32	8401	20105	28	8296	79895
33	9878	2662	27	7215	7338
34	31354	5220	26	6134	4780
35	2829	7777	25	5052	2223
36	4303	30334	24	3970	69666
37	5777	2890	23	2887	7110
38	7250	5446	22	1803	4554
39	8721	8003	21	0719	1997
40	40192	40559	20	799634	59441
41	1662	3114	19	8548	6886
42	3131	5670	18	7462	4330

Minut.	40 Grad.		Minut.	49 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
43	9.8144600	9.9348225	17	9.8796375	10.0651775
44	6067	50780	16	5287	49220
45	7534	3335	15	4199	6665
46	8999	5889	14	3110	4111
47	50464	8444	13	2021	1556
48	1928	60998	12	930	39002
49	3391	3552	11	89840	6448
50	4854	6105	10	8748	3895
51	6315	8659	9	7656	1341
52	7776	71212	8	6563	28788
53	9235	3765	7	5470	6235
54	60694	6318	6	4376	3682
55	2152	8871	5	3281	1129
56	3609	81423	4	2186	18577
57	5066	3975	3	1090	6025
58	6521	6527	2	79994	3473
59	7975	9079	1	8896	0921
60	9429	91631	0	7799	08369

Minut.	41 Grad.		Minut.	48 Grad.	
	Log. Sin.	Log. Tang.		Log. Sin.	Log. Tang.
1	9.8170882	9.9394182	59	9.8776700	10.0605818
2	2334	6733	58	5601	3267
3	3785	9284	57	4501	0716
4	5235	401835	56	3401	598165
5	6685	4385	55	2300	5615
6	8133	6936	54	1198	3064
7	9581	9486	53	0096	0514
8	81028	12036	52	68993	87964
9	2474	4585	51	7889	5415
10	3919	7135	50	6785	2865
11	5364	9684	49	5680	0316
12	6807	22233	48	4574	77767
13	8250	4782	47	3468	5218
14	9692	7331	46	2361	2669
15	91133	9879	45	1253	0121
16	2573	32428	44	0145	67572
17	4012	4976	43	59036	5024
18	5450	7524	42	7927	2476

Minut.	41 Grad.		Minut.	48 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
19	9.8196888	9.9440072	41	9.8756816	10.0559928
20	8325	2619	40	5706	7381
21	9761	5166	39	4594	4834
22	201196	7714	38	3482	2286
23	2630	50261	37	2369	49739
24	4063	2807	36	1256	7153
25	5496	5354	35	0142	4646
26	6927	7900	34	49027	2100
27	8358	60447	33	7912	39553
28	9788	2993	32	6795	7007
29	11217	5539	31	5679	4461
30	2646	8084	30	4561	1916
31	4073	70630	29	3443	29370
32	5500	3175	28	2325	6825
33	6926	5720	27	1205	4280
34	8351	8265	26	0085	1735
35	9775	80810	25	38965	19190
36	21198	3355	24	7844	6645
37	2621	5899	23	6722	4101
38	4042	8443	22	5599	1557
39	5463	90987	21	4476	09013
40	6883	3531	20	3352	6469
41	8302	96075	19	2227	3925
42	9721	8619	18	1102	1381
43	31138	501162	17	29976	498838
44	2555	3705	16	8849	6295
45	3971	6248	15	7722	3752
46	5386	8791	14	6594	1209
47	6800	11334	13	5466	88666
48	8213	3876	12	4337	6124
49	9626	6419	11	3207	3581
50	41037	8961	10	2076	1039
51	2448	21503	9	0945	78497
52	3858	4045	8	19813	5955
53	5267	6587	7	8681	3413
54	6676	9128	6	7548	0872
55	8083	31670	5	6414	68330
56	9490	4211	4	5279	5789
57	50896	6752	3	4144	3248
58	2301	9293	2	3008	0707
59	3705	41834	1	1872	58166
60	5109	4374	0	0735	5626

Minut.	42 Grad. Log. Sin.	42 Grad. Log. Tang.	Minut.	47 Grad. Log. Sin.	47 Grad. Log. Tang.
1	9.8256512	9.9546915	59	9.8709597	10.0453085
2	7913	9455	58	8458	0545
3	9314	51995	57	7319	48005
4	60715	4535	56	6179	5465
5	2114	7075	55	5039	2925
6	3512	9615	54	3898	0385
7	4910	62154	53	2756	37846
8	6307	4694	52	1613	5306
9	7703	7233	51	0470	2767
10	9098	9772	50	699326	0228
11	70493	72311	49	8182	27689
12	1887	4850	48	7037	5150
13	3279	7389	47	5891	2611
14	4671	9927	46	4744	0073
15	6063	82465	45	3597	17535
16	7453	5004	44	2449	4996
17	8843	7542	43	1301	2458
18	80231	90080	42	0152	09920
19	1619	2618	41	89002	7382
20	3000	5155	40	7851	4845
21	4393	7693	39	6700	2307
22	5778	600230	38	5548	399770
23	7163	2767	37	4396	7233
24	8547	5305	36	3242	3695
25	9930	7842	35	2088	2158
26	91312	10378	34	0934	89622
27	2694	2915	33	79779	7085
28	4075	5452	32	8623	4548
29	5454	7978	31	7466	2012
30	6833	20525	30	6309	79475
31	8212	3061	29	5151	6939
32	9589	5597	28	3992	4403
33	300966	8133	27	2833	1867
34	2342	30669	26	1673	89331
35	3717	3204	25	0512	6796
36	5091	5740	24	69351	4260
37	6464	8275	23	8189	1725
38	7830	40811	22	7026	59189
39	9209	3346	21	5863	6654
40	10580	5881	20	4699	4119
41	1950	8416	19	3534	1584
42	3320	50951	18	2369	49049

Minut.	42 Grad. Log. Sin.	42 Grad. Log. Tang.	Minut.	51 Grad. Log. Sin.	51 Grad. Log. Tang.
43	9.8314688	9.9653486	17	9.8661203	10.0346514
44	6056	6020	16	0036	3980
45	7423	8555	15	58868	1445
46	8789	61089	14	7700	38911
47	20155	3623	13	6531	6377
48	1519	6157	12	5362	3843
49	2883	8692	11	4192	1308
50	4246	71225	10	3021	28775
51	5609	3759	9	1849	6241
52	6970	6293	8	0677	3707
53	8331	8827	7	49504	1173
54	9691	81360	6	8331	18640
55	31050	3893	5	7156	6107
56	2408	6427	4	5981	3573
57	3766	8960	3	4806	1040
58	5122	91493	2	3629	08507
59	6478	4026	1	2452	5974
60	7833	6559	0	1275	3441

Minut.	43 Grad. Log. Sin.	43 Grad. Log. Tang.	Minut.	46 Grad. Log. Sin.	46 Grad. Log. Tang.
1	9.8339188	9.9699091	59	9.8640096	10.0300909
2	40541	701624	58	38917	298376
3	1894	4157	57	7737	5843
4	3246	6689	56	6557	3311
5	4597	9221	55	5376	0779
6	5948	11754	54	4194	88246
7	7297	4286	53	3011	5714
8	8646	6818	52	1828	3182
9	9994	9350	51	0644	0650
10	51341	21882	50	29460	78118
11	2688	4413	49	8274	5587
12	4033	6945	48	7088	3055
13	5378	9477	47	5902	0523
14	6722	32008	46	4714	67992
15	8066	4539	45	3526	5461
16	9408	7071	44	2338	2929
17	60750	9602	43	1148	0398
18	2091	42133	42	19958	57867

Minut.	43 Grad. Log. Sin.	43 Grad. Log. Tang.	Minut.	46 Grad. Log. Sin.	46 Grad. Log. Tang.
19	9.8363431	9.9744664	41	9.8618767	10.0255336
20	4771	7195	40	7576	2805
21	6109	9726	39	6383	0274
22	7447	52257	38	5190	47743
23	8784	4787	37	3997	5213
24	70121	7318	36	2803	2682
25	1456	9849	35	1608	0151
26	2791	62379	34	0412	37621
27	4125	4909	33	09215	5091
28	5458	7440	32	8018	2560
29	6790	9970	31	6821	0030
30	8122	72500	30	5622	27500
31	9453	5030	29	4423	4970
32	80783	7560	28	3223	2440
33	2112	80090	27	2022	19910
34	3441	2620	26	0821	7380
35	4769	5149	25	599619	4851
36	6096	7679	24	8416	2321
37	7422	90209	23	7213	09791
38	8747	2738	22	6009	7262
39	90072	5268	21	4804	4732
40	1396	7797	20	3599	2203
41	2719	800326	19	2393	199674
42	4041	2856	18	1186	7144
43	5363	5385	17	89978	4615
44	6684	7914	16	8770	2086
45	8004	10443	15	7561	89557
46	9323	2972	14	6351	7028
47	400642	5501	13	5141	4499
48	1959	8030	12	3929	1970
49	3276	20559	11	2718	79441
50	4593	3087	10	1505	6913
51	5908	5616	9	0292	4384
52	7223	8145	8	79078	1855
53	8537	30673	7	7863	69327
54	9850	3202	6	6648	6798
55	11162	5730	5	5432	4270
56	2474	8259	4	4215	1741
57	3785	40787	3	2998	59213
58	5095	3315	2	1779	6685
59	6404	5844	1	0561	4156
60	7713	8372	0	69341	1628

44 Grad.

Minut.	44 Grad.		Minut.	45 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
1	9.8419021	9.9850900	59	9.8568121	10.0149100
2	20328	3428	58	6900	6572
3	1634	5956	57	5678	4044
4	2939	8484	56	4455	1516
5	4244	61012	55	3232	38988
6	5548	3540	54	2008	6460
7	6851	6068	53	0784	3932
8	8154	8596	52	59558	1404
9	9456	71123	51	8332	28877
10	30757	3651	50	7106	6349
11	2057	6179	49	5878	3821
12	3356	8706	48	4650	1294
13	4655	81234	47	3421	18766
14	5953	3761	46	2192	6239
15	7250	6289	45	0961	3711
16	8547	8816	44	49730	1184
17	9842	91344	43	8499	08656
18	71137	3871	42	7266	6129
19	42432	6399	41	6033	3601
20	3725	8926	40	4799	1074
21	5018	901453	39	3564	0098547
22	7631	3981	38	2329	6019
23	7601	6508	37	1093	3492
24	8891	9035	36	39856	0965
25	50181	11562	35	8619	88438
26	1470	4089	34	7381	5911
27	7258	6616	33	6142	3384
28	4045	9143	32	4902	0857
29	5332	21670	31	3662	78330
30	6618	4197	30	2421	5803
31	7903	6724	29	1179	3276
32	9188	9251	28	29936	0749
33	60471	31778	27	8693	68222
34	1754	4305	26	7449	5695
35	3036	6832	25	6204	3168
36	4318	9359	24	4959	0641
37	5599	41886	23	3713	58114
38	6879	4413	22	2466	5587
39	8158	6940	21	1218	3060
40	9436	9466	20	19970	0534
41	70714	51993	19	8721	48007
42	1991	4520	18	7471	5480

Minut.	44 Grad.		Minut.	45 Grad.	
	Log. Sin.	*Log. Tang.*		*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
43	9.8473267	9.9957047	17	9.8516220	10.0042953
44	4543	9573	16	4969	0427
45	5817	62100	15	3717	37900
46	7091	4627	14	2465	5373
47	8365	7154	13	1211	2846
48	9637	9680	12	09957	0320
49	80909	72207	11	8702	27793
50	2180	4734	10	7446	5266
51	3450	7260	9	6190	2740
52	4720	9787	8	4933	20213
53	5989	82314	7	3675	17686
54	7257	4840	6	2417	5160
55	8524	7367	5	1157	2633
56	9791	9893	4	499897	0107
57	91057	92420	3	8637	07580
58	2322	4947	2	7375	5053
59	3586	7473	1	6113	2527
60	4850	0000000	0	4850	0000000

Druckfehler,
die den Sinn stören können.

Seite u. §.	Fehler.	Verbesserungen.
25. §. 19. Bew.	daß der Winkel x den Winkel u decke.	— — — — x den Winkel y decke.
— — —	In dem gleich darauf folgenden Beweis muß anstatt n überall r, und wo r ist n gesezet werden.	
26. a.	$x + u < 180^\circ$	$x + y < 180^\circ$
41. c.	Wenn L K mit a b gleichläuft.	L K mit ad ꝛc.
45. §. 35.	Zwey Parallelograme a b c d, c e d f	— — — — a b c d, e b d f.
47. b.	Wenn man aus a auf c f.	auf e f.
51. §. 38.	$\frac{\frac{1}{2}dx(a^2-x^2)-x^2dx}{2\sqrt{(a^2-x^2)}}=0$	muß $\frac{1}{2}$ weggelassen werden.
weiter unten	dieß in der Gleichung $ed=\sqrt{(a^2-x^2)}$ ꝛc.	— — — $cd=\sqrt{(a^2-x^2)}$.
55. §. 41	Für dy^2 subst:	Für y^2 ꝛc.
61. §. 43.	aber ambc — adba $= \triangle abc$	adbc — adba $= \triangle abc$.
68. Bew. des II. Folgl.	$\triangle AbC : \triangle cBc = Ab : bB$	$\triangle Abc : \triangle bcC = Ab : bB$
gleich darauf	$\triangle Abc : \triangle cBC = Ac : cC$	$\triangle Abc : \triangle bcC = Ac : cC$.
69. Bew. des 3)	bey gleichen Höhen	soll weggelassen werden.
79. b.	wie in der VI Fig.	— — VIII Fig.

Seite u. §.	Fehler.	Verbesserung.
86. Anmerk.	und führe das △ M d o	- - - △ M r o
weiter unten	wo $y^2 = \triangle$ M d o	$y^2 = \triangle$ M r o
101. d.	Auf dem Punkte des Diameters L a.	Auf dem Punkte b des ꝛc.
102. e.	dieser negative Sinus wächst bis 450°	— — — — bis 270°
107. §. 72.	sin. L : sin. d = d g : L d.	sin. L : sin. d = d g : L g.
110. §. 76.	ist schon aus §. 67. c bekannt.	— — aus §. 68. c ꝛc.
116. §. 79.	(tab. V Fig. VIII.)	(tab. V. Fig. IX.)
121.	L. 16° 46′ = 9,4601079	— — 9,4602412.
133. 2)	a M n c	a M N c
136. 2)	bis in e, so daß sie endlich bey c	bis in c, so daß sie endlich bey e
gleich darauf	a p, a e ꝛc.	a p, a c ꝛc.
140.	der 2) o n ein Zirkel	o r ꝛc.
141. 1. Bew.	b e o eine halbe Parabel	c d e ꝛc.
160. §. 115.	Sollte Tab. VII Fig. V. angezeigt seyn.	
172.	Wenn nun L M = S	— — C M = S.
184.	Eine Zyklyde A m c d	— — A m e c.

Tab. I.

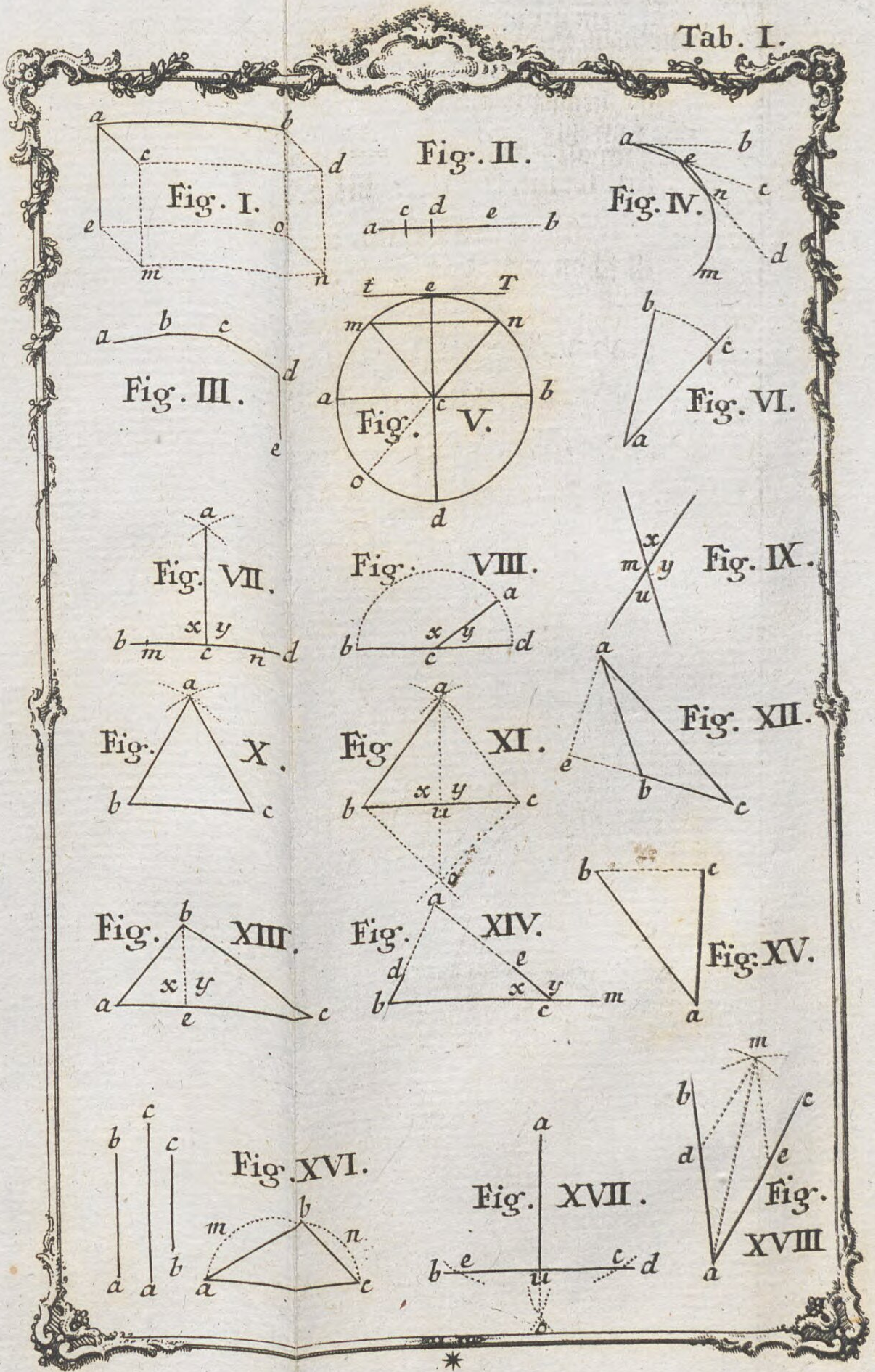


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII.
Fig. XIV.
Fig. XV.
Fig. XVI.
Fig. XVII.
Fig. XVIII

Tab. II.

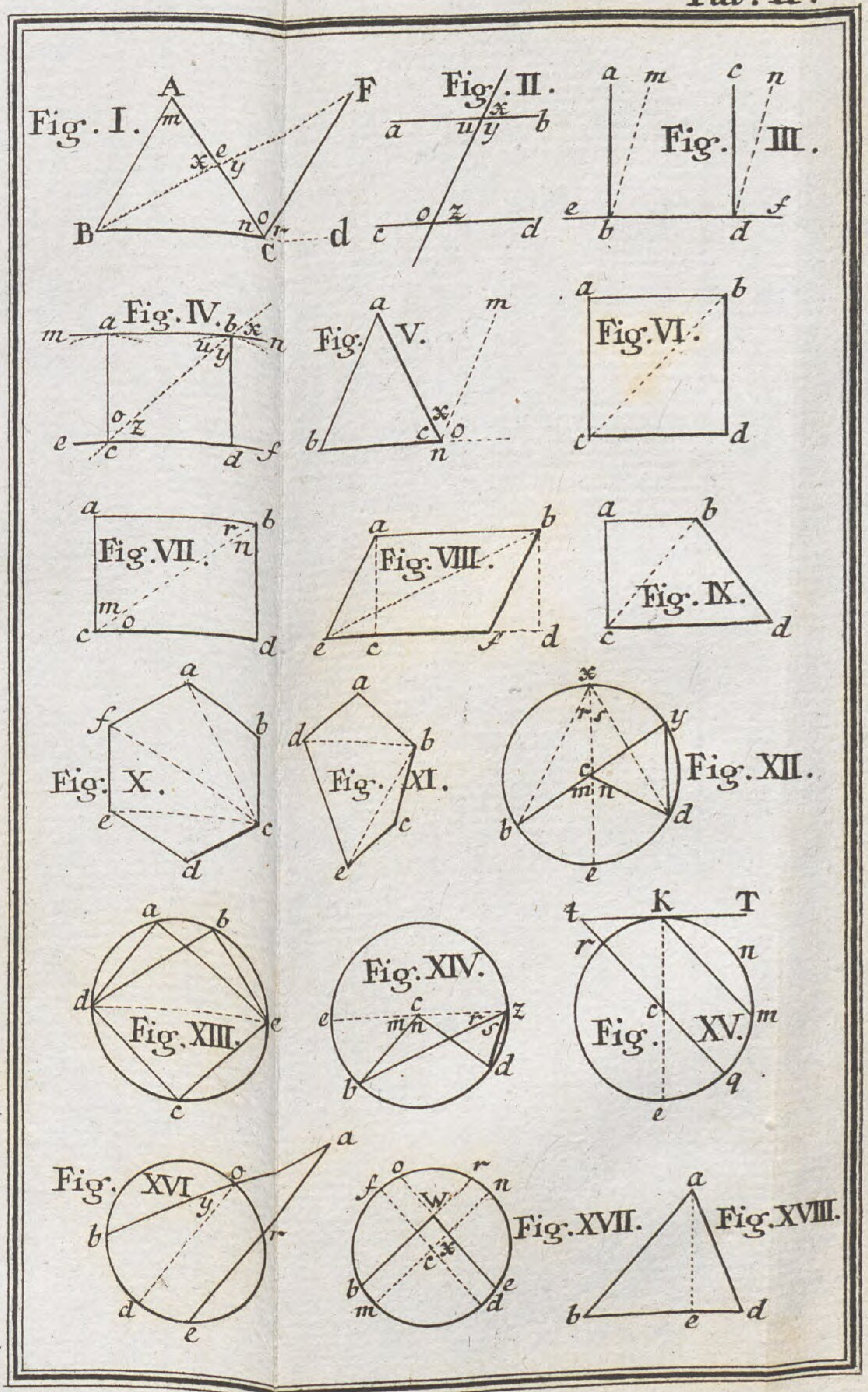


Fig. I.
A m x e y B C n o r d F
Fig. II.
x u y a b o z c d
Fig. III.
a m c n e b d f
Fig. IV.
m a b x u y n o z e c d f
Fig. V.
a m x b c o n
Fig. VI.
a b c d
Fig. VII.
a b r n m o c d
Fig. VIII.
a b e c f d
Fig. IX.
a b c d
Fig. X.
a f b e c d
Fig. XI.
a d b c e
Fig. XII.
x r s y c m n b d e
Fig. XIII.
a b d e c
Fig. XIV.
c e m n r s z b d
Fig. XV.
t K T r n c m q e
Fig. XVI
o a y b r d e
Fig. XVII.
o r f n w x c b e m d
Fig. XVIII.
a b e d

*

Tab. III.

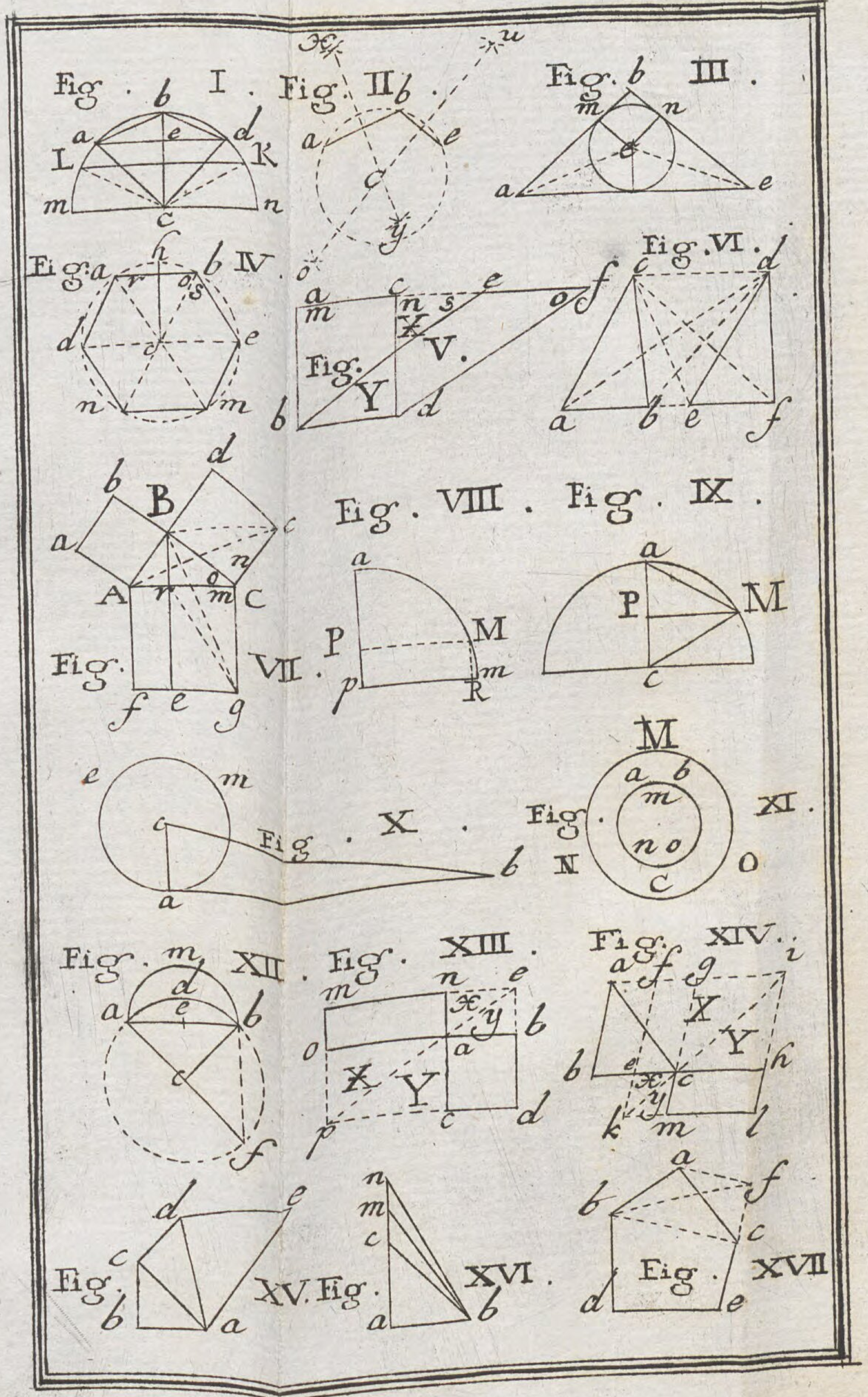


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII.
Fig. XIV.
Fig. XV.
Fig. XVI.
Fig. XVII

Tab. IV.

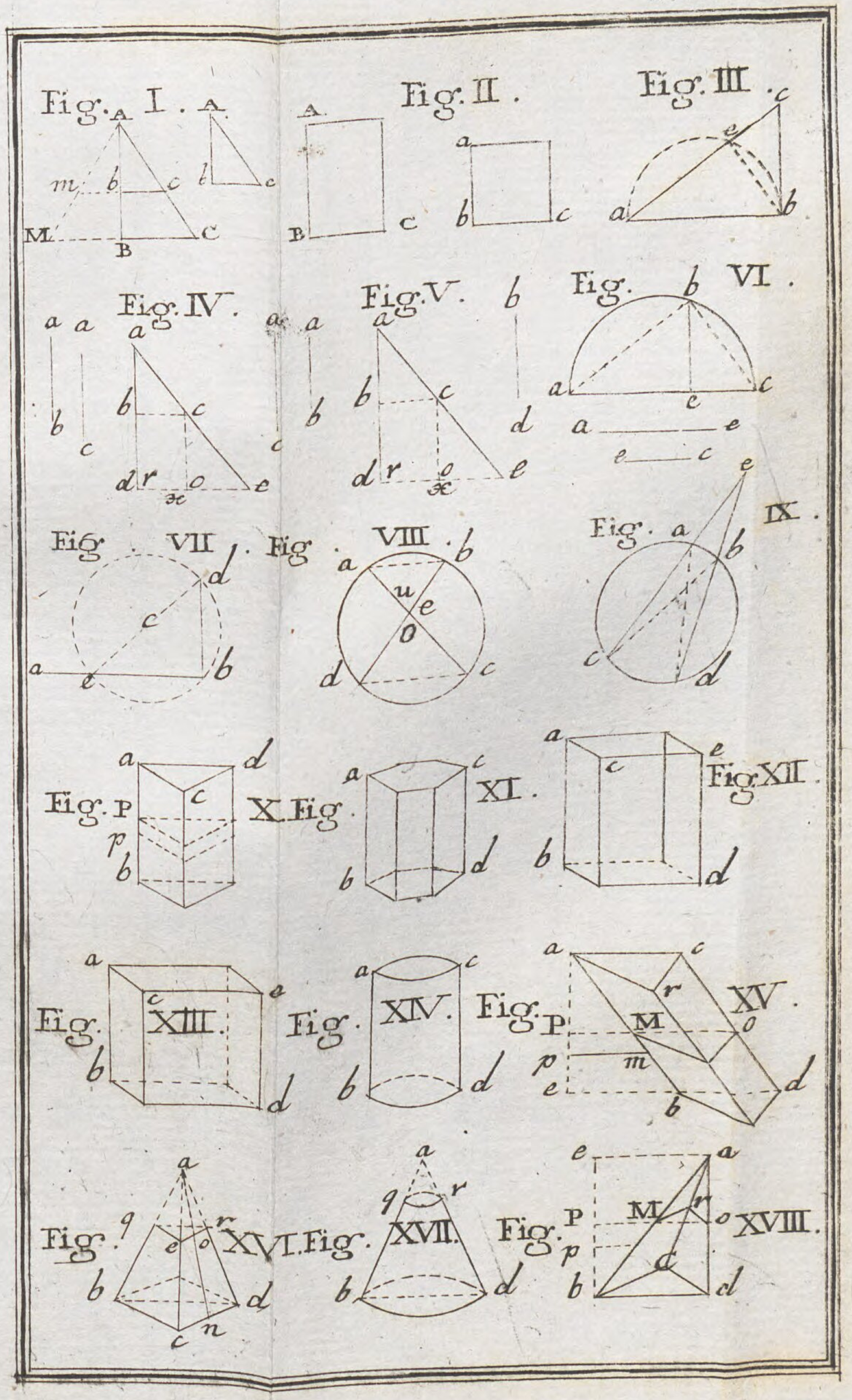


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII.
Fig. XIV.
Fig. XV.
Fig. XVI.
Fig. XVII.
Fig. XVIII.

Tab. V.

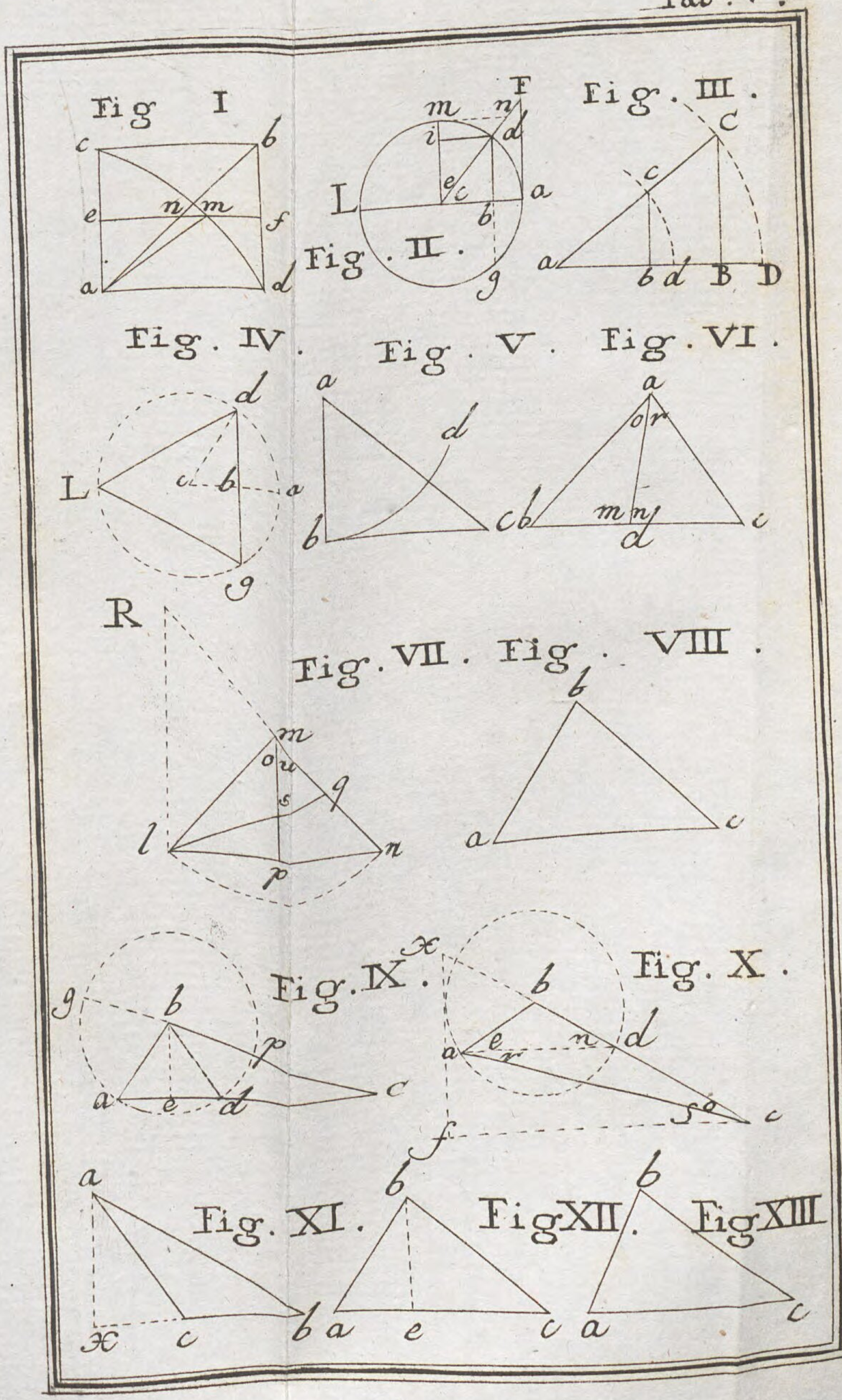


Fig I
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig XII.
Fig XIII

Tab. VI.

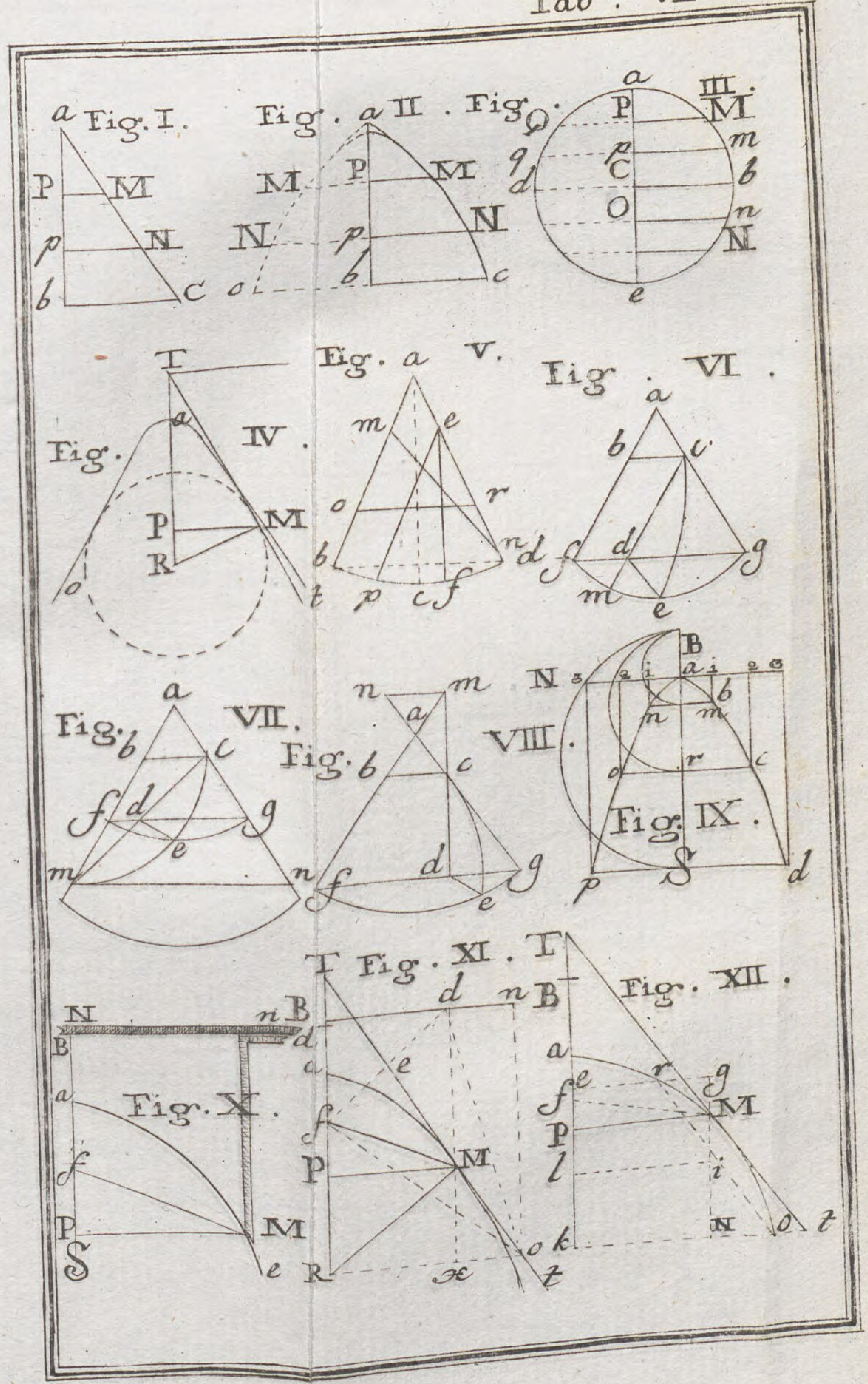
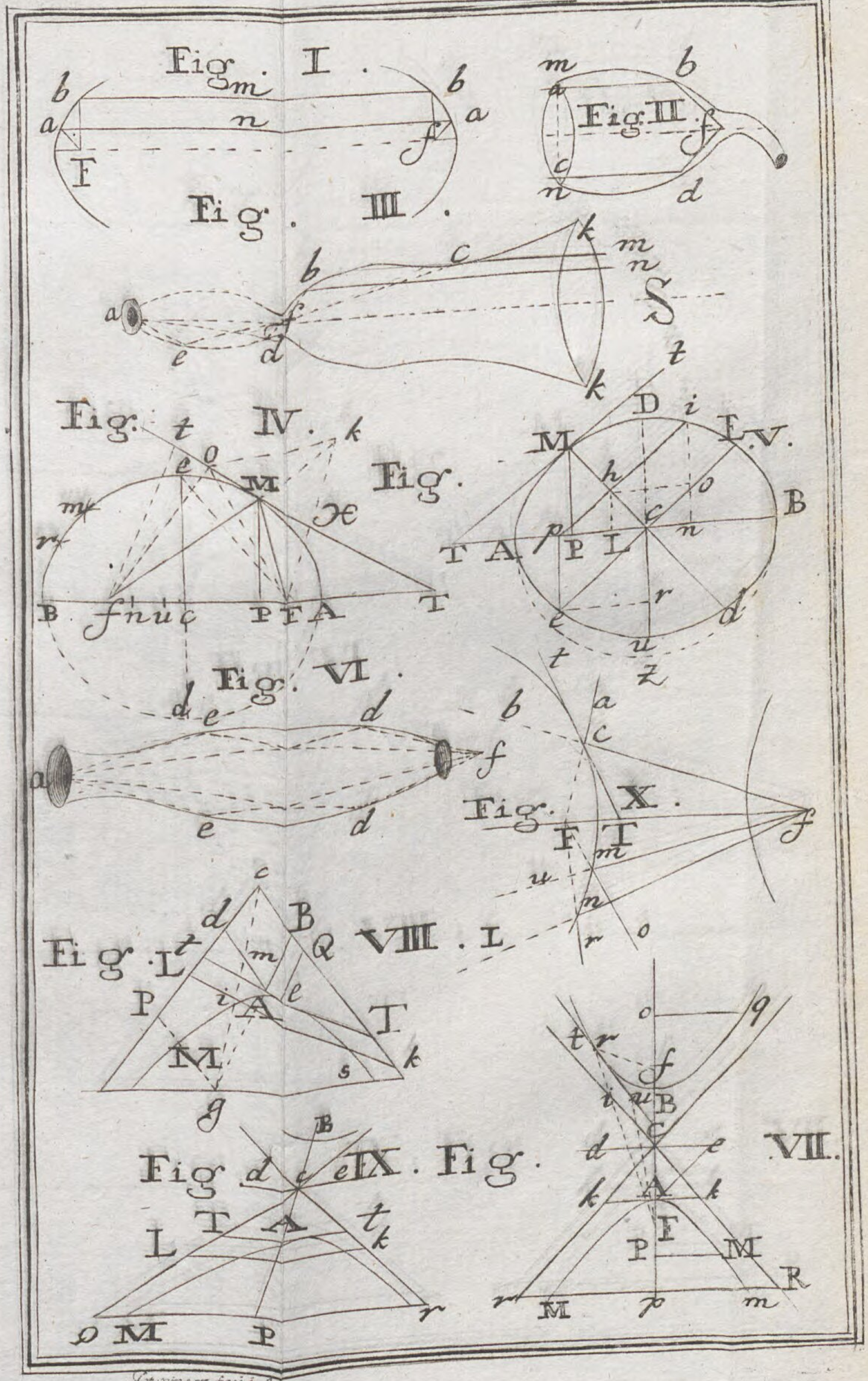
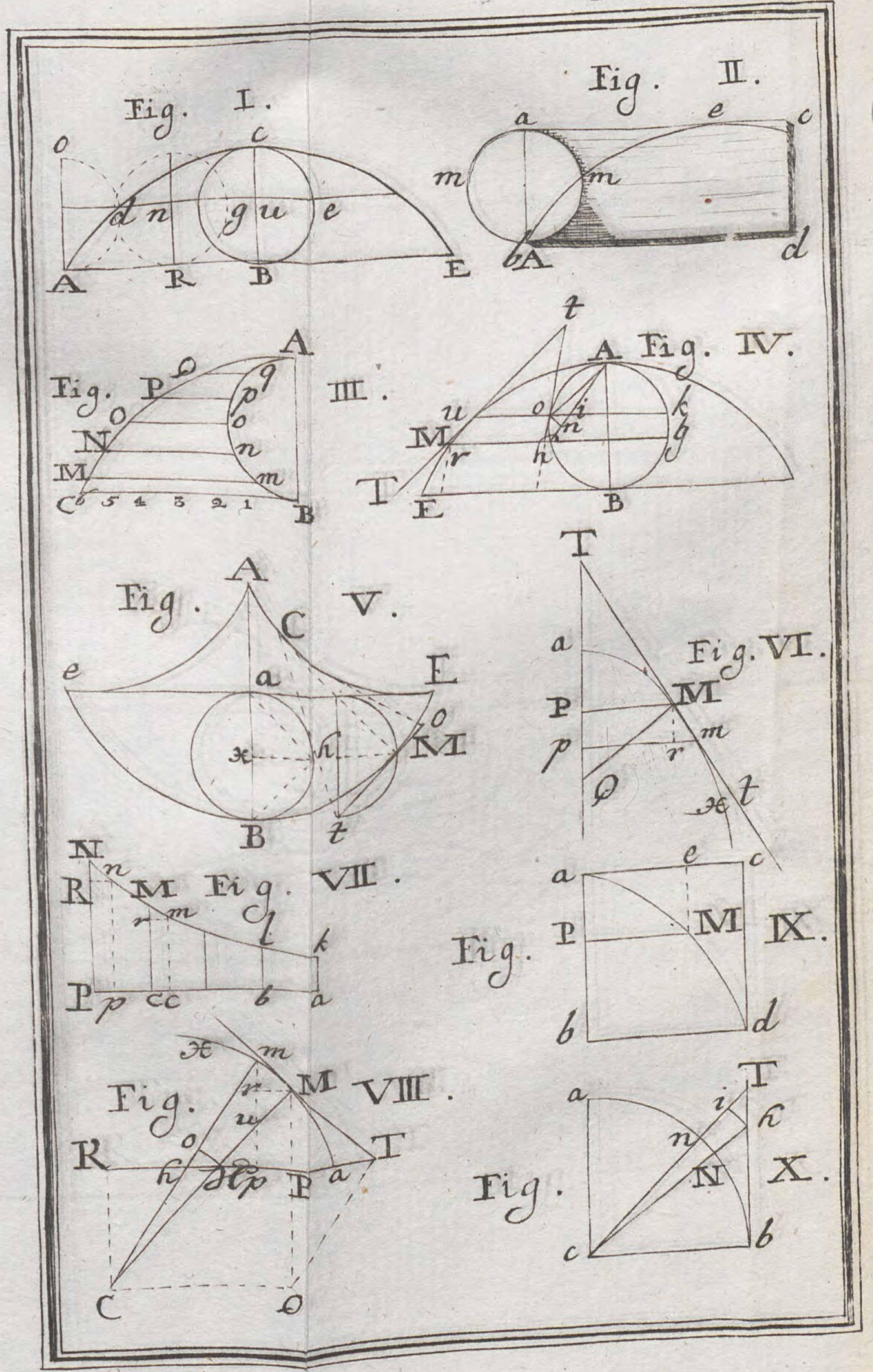


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.



Gnoringer fecit Mon.

Tab. VIII.



Gruninger sc.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Danzer, Joseph Melchior,

Joseph Tanzers der Weltweisheit Doktors ... mathematisches Lehrbuch zum Gebrauche der churfürstlichen Lyceen

Bd.: 2

München 1781

Math.u. 193-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10625612-9
VD18 80411339-001